Hans Walser, [20221006]

Ecken- und Flächenschwerpunkt

Anregung: Jörg Meyer, Hameln

1 Worum geht es?

In einem affin-regulären Fünfeck fallen der Ecken- und der Flächenschwerpunkt zusammen. Die Umkehrung gilt nicht, Gegenbeispiel dazu.

2 Gegenbeispiel

Wir arbeiten mit dem Fünfeck $A(-1, 0)$, $B(-1, -1)$, $C(1, -1)$, $D(1, 0)$, $E(0, h)$ (Abb. 1).

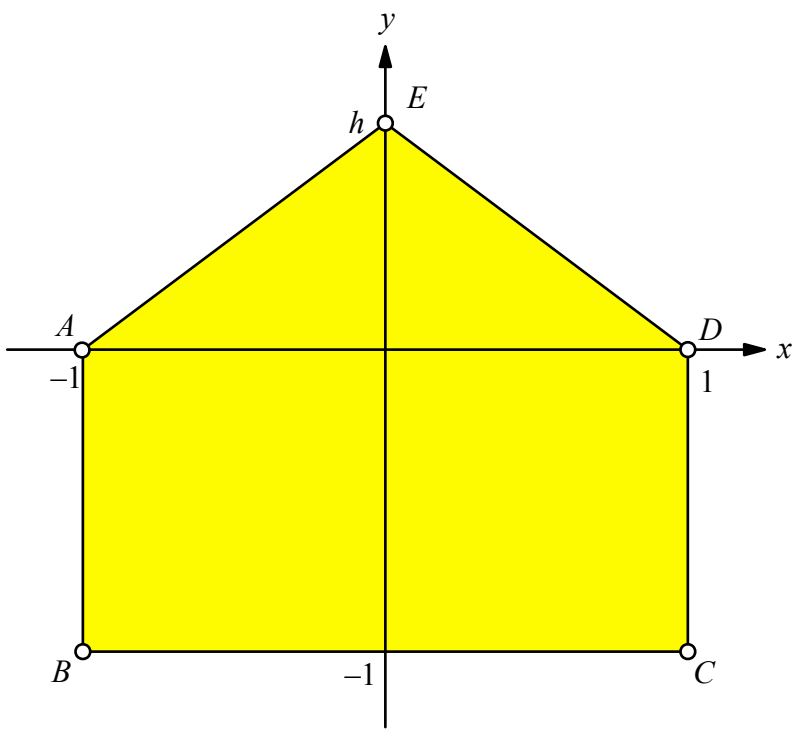

Abb. 1: Fünfeck

3 Eckenschwerpunkt

Für den Eckenschwerpunkt Q finden wir:

$$Q = \tfrac{1}{5}\left(A + B + C + D + E\right) = \left(0, \tfrac{1}{5}\left(-2 + h\right)\right)$$

4 Flächenschwerpunkt

Zur Berechnung des Flächenschwerpunktes T zerlegen wir das Fünfeck $ABCDE$ in das Rechteck $ABCD$ und das Dreieck ADE (Abb. 2).

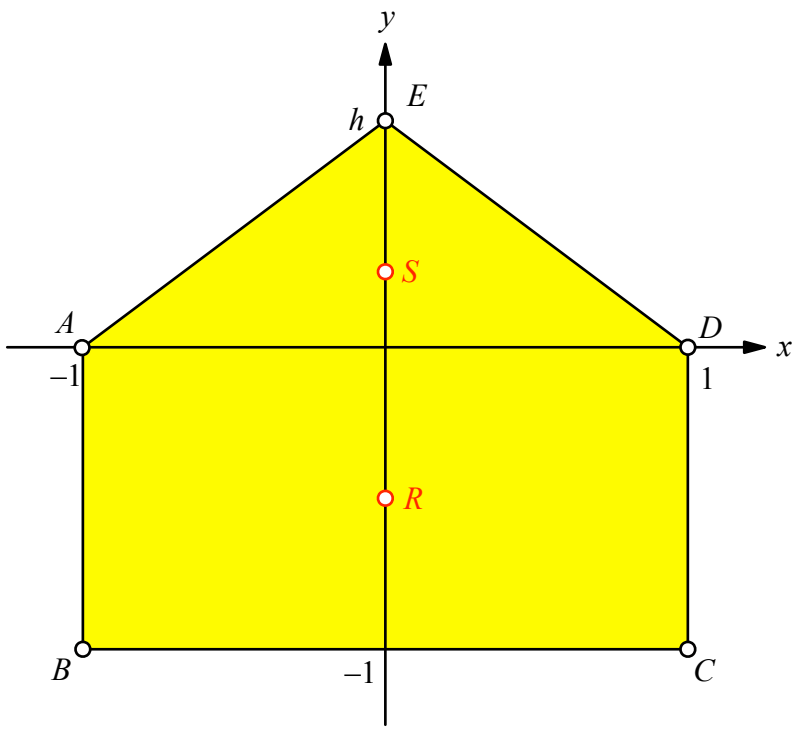

Abb. 2: Zerlegung

Das Rechteck hat den (Flächen-)Schwerpunkt $R(0, -1/2)$ den Flächeninhalt 2. Das Dreieck hat den Schwerpunkt $S(0, h/3)$ und den Flächeninhalt h. Für den Flächenschwerpunkt T des Fünfeckes finden wir:

$$T = \frac{2R+hS}{2+h} = \frac{2\left(0,-\frac{1}{2}\right)+h\left(0,\frac{h}{3}\right)}{2+h} = \left(0, \frac{-1+\frac{h^2}{3}}{2+h}\right)$$

5 Zusammenfallen der Schwerpunkte

Für das Zusammenfallen von Eckenschwerpunkt Q und Flächenschwerpunkt T ergibt sich die Bedingung:

$$\frac{1}{5}\left(-2+h\right)=\frac{-1+\frac{h^2}{3}}{2+h}$$

Diese Gleichung lässt sich umformen zur quadratischen Gleichung

$$h^2=\frac{3}{2}$$

Die positive Lösung ist:

$$h=\sqrt{\frac{3}{2}}\approx 1.2247$$

Die Abbildung 3 zeigt das zugehörige Fünfeck. Der gemeinsame Schwerpunkt ist rot eingezeichnet.

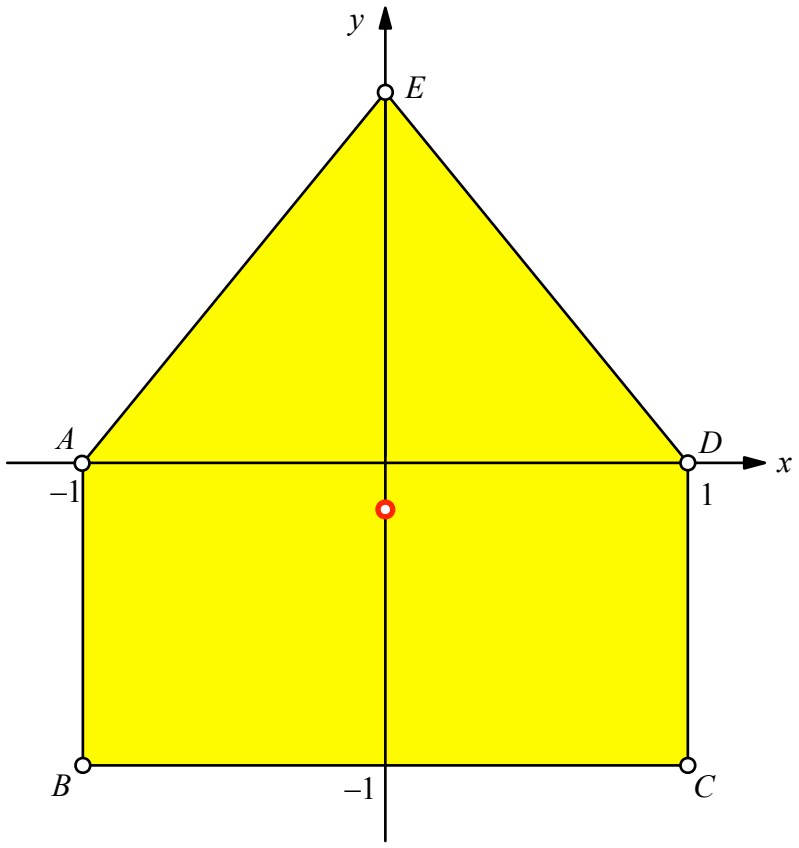

Abb. 3: Eckenschwerpunkt gleich Flächenschwerpunkt

Das Fünfeck ist nicht affin regulär, da zum Beispiel die Diagonale *BD* nicht parallel zur Seite *AE* ist.

Weblinks

Jörg Meyer: Die Schwerpunkte eines konvexen ebenen Fünfecks
http://mathematik-meyer.de/Materialien/SchwP_5Eck.pdf

Jörg Meyer: Die Schwerpunkte eines konvexen ebenen Vierecks
http://mathematik-meyer.de/Materialien/SchwP_4Eck.pdf

Hans Walser: Flächenschwerpunkt
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Flaechenschwerpunkt/Flaechenschwerpunkt.html

Literatur

Stoll, E. (1880): Ueber den Schwerpunkt des Vierecks. In: Archiv Math. Phys. (Grunerts Archiv) 65 (1880), S. 445 f.

Walser, H. (2012): Schwerpunkt. *Mathematikinformation*, 57, 14-22. ISSN 1612-9156.