Hans Walser, [20061002a]

Dynamische Schneeflocke

1 Worum es geht

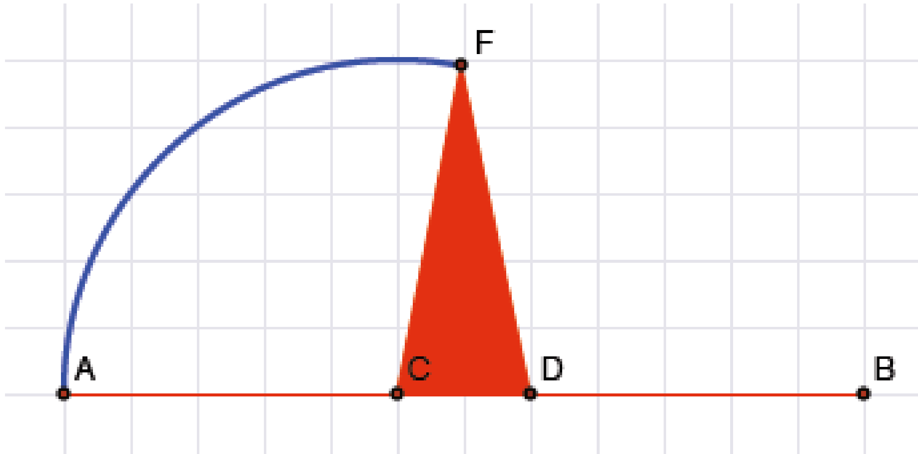
Es geht darum, die Konstruktion, welche zur Schneeflocke von Helge van Koch führt, zu dynamisieren.

2 Basiskonstruktion

Auf einer Strecke *AB* wählen wir einen Punkt *C*. Wir definieren dass Verhältnis:

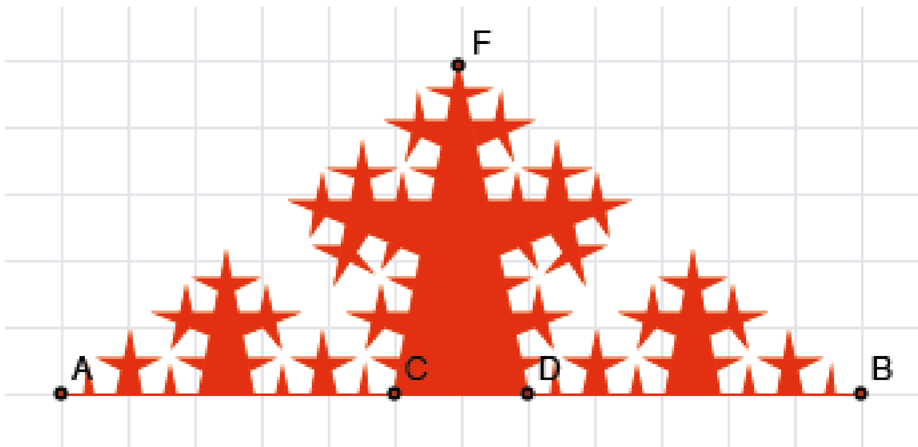
$$p = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Dann zeichnen wir einen Streckenzug *ACFDB* so dass die Teilstrecken *AC, CF, FD, DB* alle gleich lang sind.



Basiskonstruktion

Nun bauen wir die Sache zum Fraktal aus.



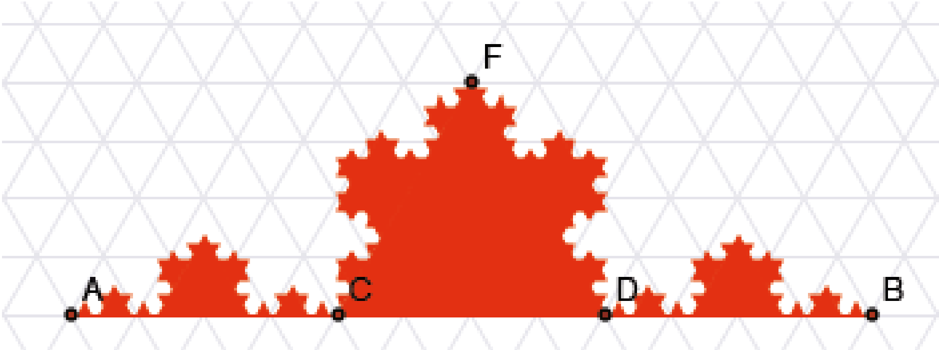
Fraktal

Nun können wir *C* bewegen, das heißt, *p* variieren.

3 Beispiele

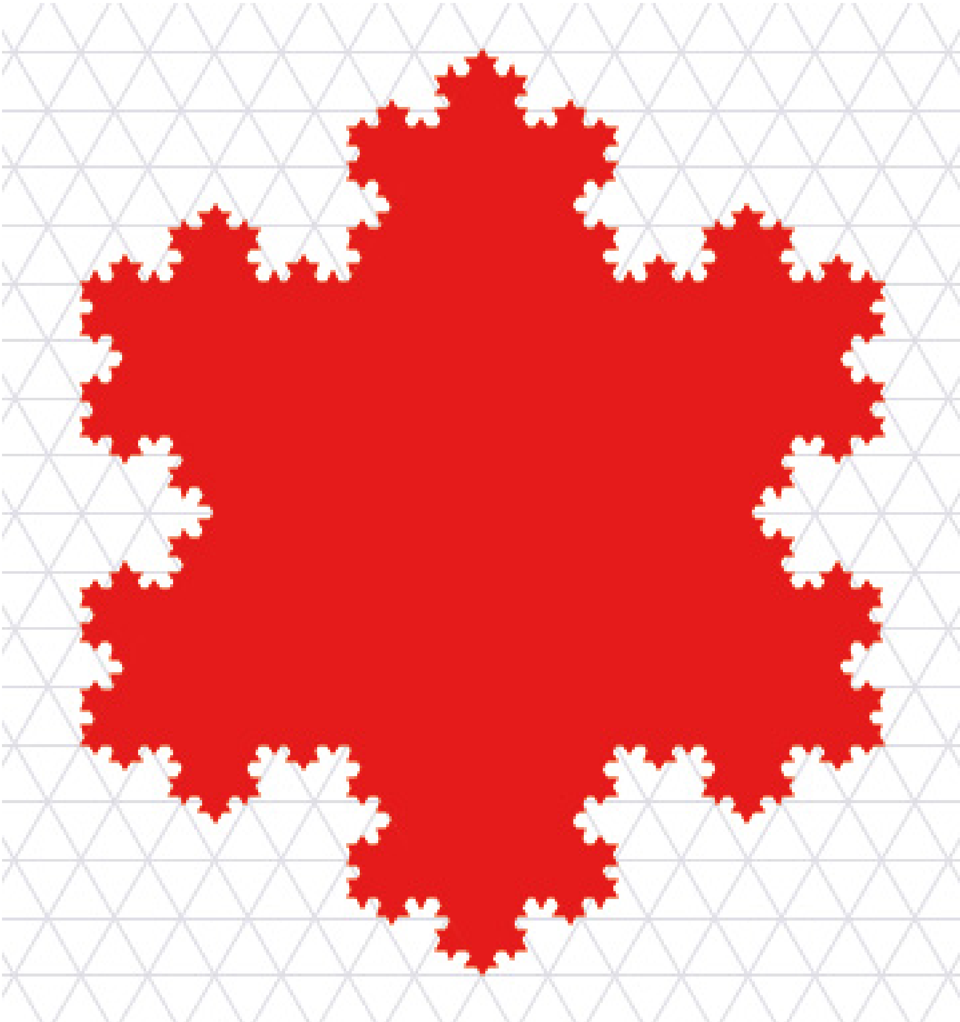
3.1 Schneeflocke von Helge van Koch

Für $p = \frac{1}{3}$ ergibt sich ein Drittel des Randes der Schneeflocke von Helge van Koch. Die aufgesetzten Dreiecke sind gleichseitig.



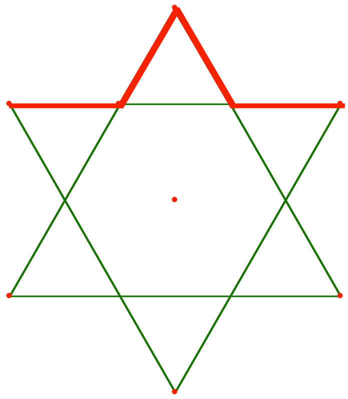
Rand der Schneeflocke

Die folgende Abbildung zeigt die Schneeflocke als Ganzes.



Schneeflocke

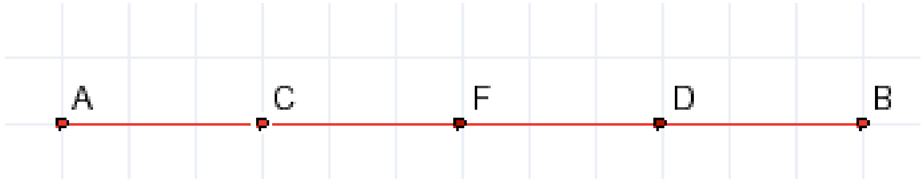
Diese Schneeflocke basiert auf der Sternfigur $\left\{\begin{smallmatrix}6\\2\end{smallmatrix}\right\}$.



Sternfigur $\left\{\begin{smallmatrix}6\\2\end{smallmatrix}\right\}$

3.2 Minimales *p*

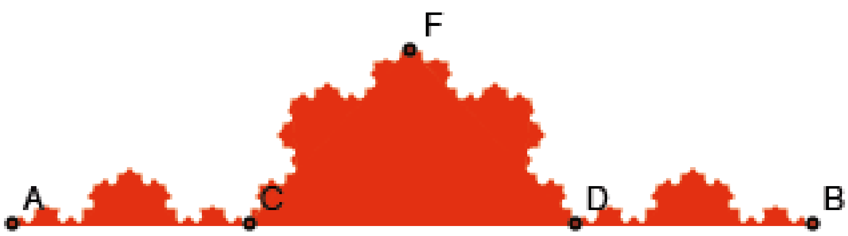
Das minimale p ist $p=\frac{1}{4}$; in diesem Fall erhalten wir eine Strecke.



Strecke

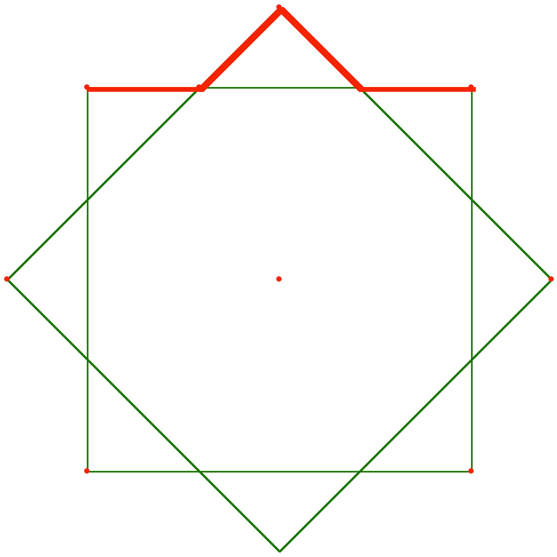
3.3 Rechte Winkel

Für $p=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.2929$ erhalten wir rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke aufgesetzt.



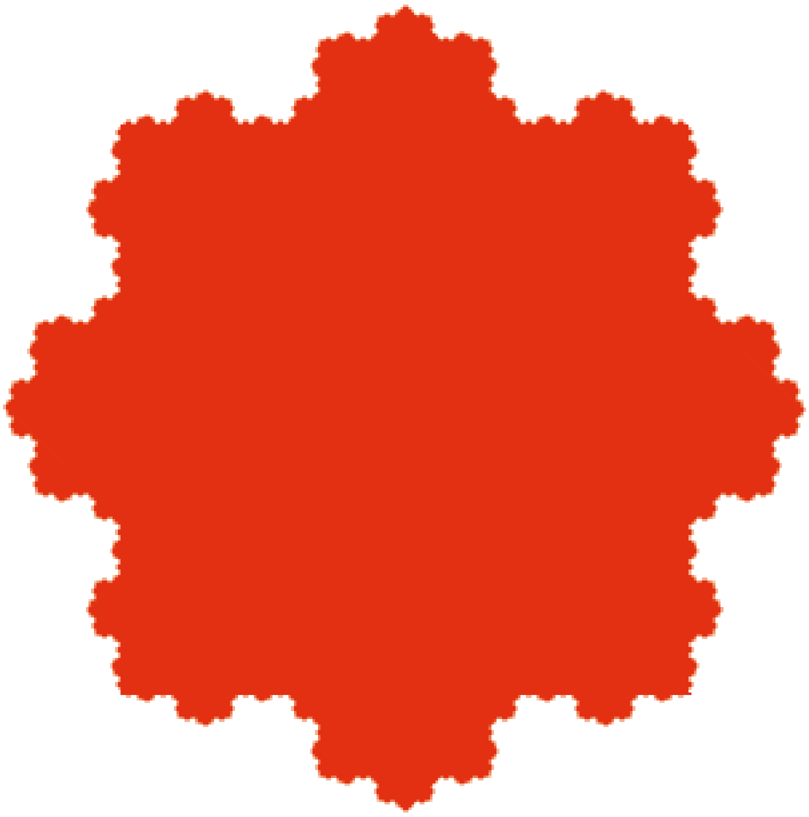
Halbe Quadrate aufgesetzt

Dies lässt sich einbauen in die Sternfigur $\left\{ \begin{smallmatrix} 8 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$.



Sternfigur $\left\{ \begin{smallmatrix} 8 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$

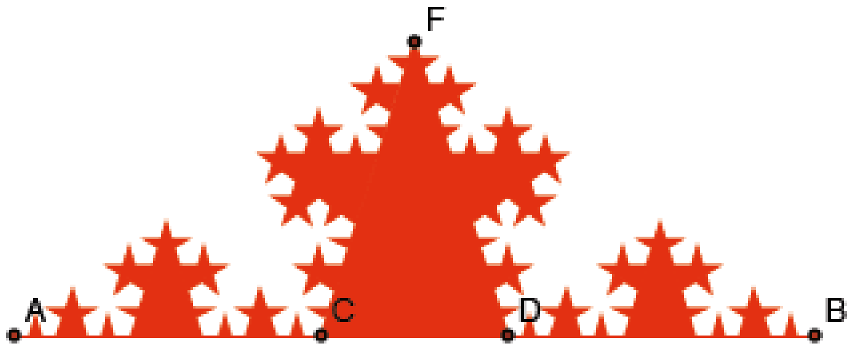
Wir erhalten die folgende Schneeflocke.



Schneeflocke

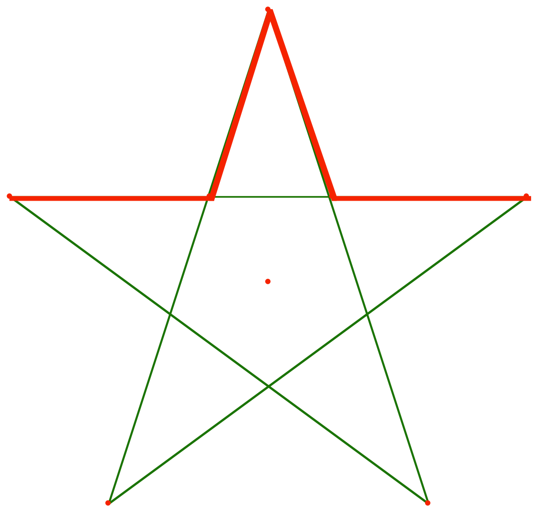
3.4 Im Pentagramm

Für $p = \rho^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \approx 0.3820$ erhalten wir goldene Dreiecke aufgesetzt.



Goldene Dreiecke

Dies lässt sich ins Pentagramm $\left\{ \begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ einbetten.



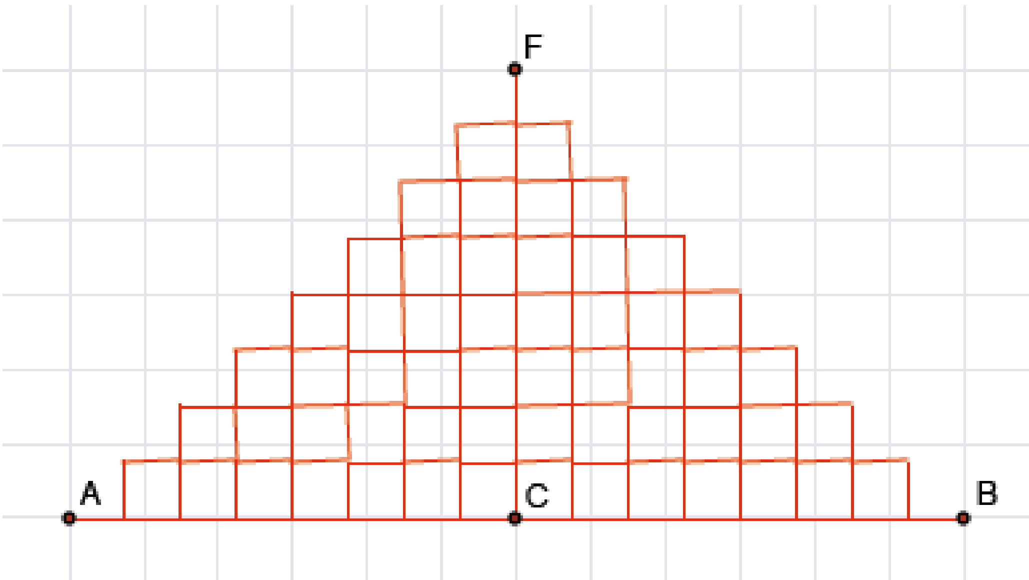
Pentagramm $\left\{ \begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$

Wir erhalten die folgende Schneeflocke.

Schneeflocke

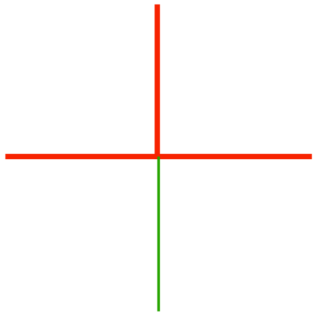
3.5 Merkwürdiges

Für $p=\frac{1}{2}$ sieht die Sache merkwürdig aus.



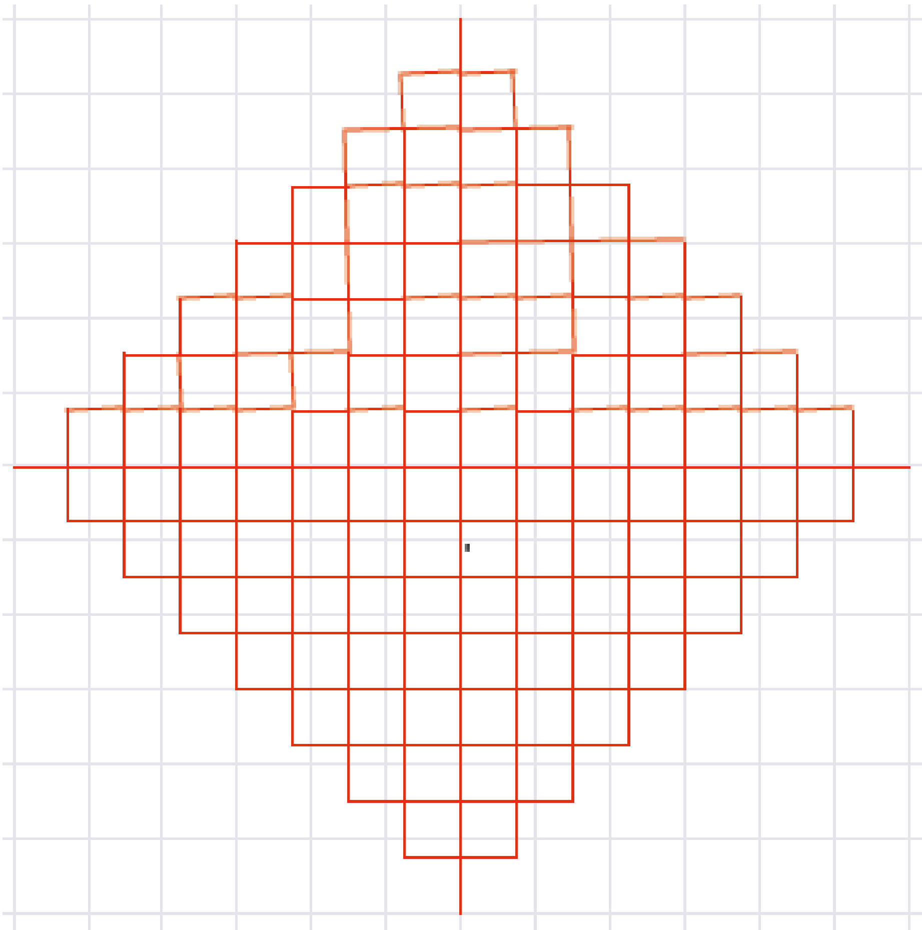
Merkwürdig

Das lässt sich in die Figur $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ einbetten.



Die Figur $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\}$, ein simples Kreuz

Als „Schneeflocke“ ergibt sich ein Quadrat welches überall dicht mit Fraktallinien besetzt ist.



Quadrat als Schneeflocke

4 Dimension

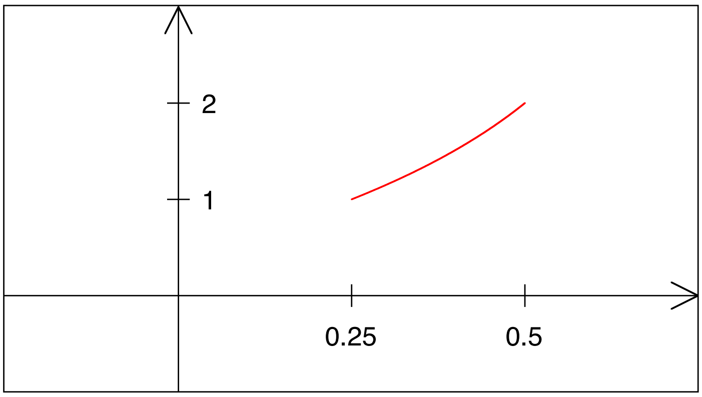
Für die fraktale Dimension D der Randkurven erhalten wir:

$$\left(\tfrac{1}{p}\right)^D = 4$$

Also:

$$D(p) = -\frac{\ln(4)}{\ln(p)}$$

Der Funktionsgraph von $D(p)$ sieht für die relevanten Werte $p \in \left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right]$ so aus:



Funktionsgraph

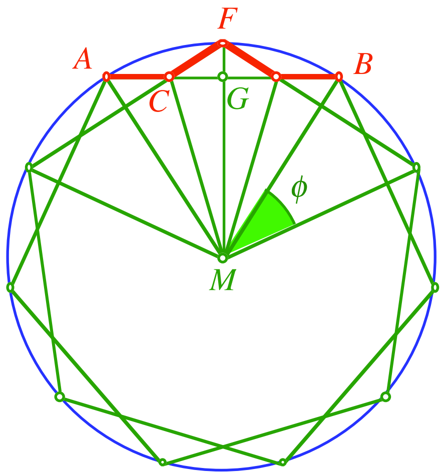
Für $p = \frac{1}{4}$ ergibt sich eine Strecke. Die fraktale Dimension ist 1. Für $p = \frac{1}{2}$ ergibt sich ein ausgefülltes Quadrat; die fraktale Dimension ist 2. Für $p \in \left]\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right[$ ergeben sich Schneeflocken. Die fraktalen Dimensionen ihrer Ränder liegen zwischen 1 und 2.

5 Sternfiguren

Wir haben die verallgemeinerten Schneeflocken durch Einbau in eine Sternfigur $\left\{\tfrac{n}{2}\right\}$ gefunden. Wie hängen p und D von n ab?

Wir setzen im Folgenden $n \geq 4$ voraus.

Der Zentriwinkel ϕ eines regelmäßigen n-Eckes ist $\phi = \frac{2\pi}{n}$. Wenn wir nun die Sternfigur $\left\{\tfrac{n}{2}\right\}$ in den Einheitskreis einzeichnen, erhalten wir:



Sternfigur

Es ist dann:

$$\overline{AB} = 2\sin(\phi)$$
$$\overline{AG} = \sin(\phi)$$
$$\overline{MG} = \cos(\phi)$$
$$\overline{CG} = \overline{MG}\tan\left(\tfrac{\phi}{2}\right) = \cos(\phi)\tan\left(\tfrac{\phi}{2}\right)$$
$$\overline{AC} = \overline{AG} - \overline{CG} = \sin(\phi) - \cos(\phi)\tan\left(\tfrac{\phi}{2}\right)$$
$$p = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sin(\phi)-\cos(\phi)\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}{2\sin(\phi)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\tan(\phi)}$$

Wegen

$$\tan(\phi) = \tan\left(\tfrac{\phi}{2} + \tfrac{\phi}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}{1-\left(\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^2}$$

erhalten wir:

$$p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\tan(\phi)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(1-\left(\tan\left(\tfrac{\phi}{2}\right)\right)^2\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\tan\left(\tfrac{\phi}{2}\right)\right)^2$$

$$p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\tan\left(\tfrac{\phi}{2}\right)\right)^2$$

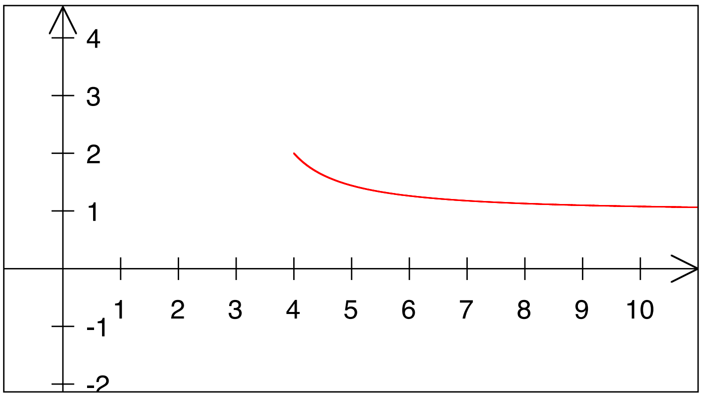
Wegen $\phi = \frac{2\pi}{n}$ ergibt sich:

$$p(n) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\tan\left(\tfrac{\pi}{n}\right)\right)^2$$

Daraus ergibt sich für D:

$$D(n) = -\frac{\ln(4)}{\ln(p(n))} = -\frac{\ln(4)}{\ln\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2\right)}$$

Die Figur zeigt den Funktionsgraphen für $n \geq 4$.



$$D(n) = -\frac{\ln(4)}{\ln\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2\right)}$$

Insbesondere ist $D(4) = 2$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\left(D(n)\right) = 1$. Für $n \to \infty$ wird das Fraktal zum Umkreis.