Hans Walser, [20060329a]

Dudeney

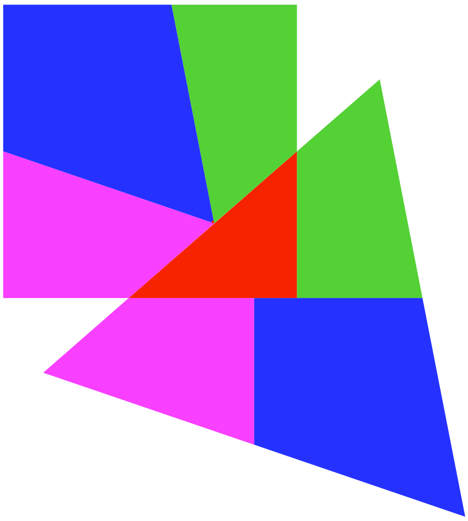
0 Worum geht es?

Ernest Dudeney demonstrierte 1905 vor der Royal Society in London die Zerlegung des Quadrats und des gleichseitigen Dreiecks in drei Vierecke und ein Dreieck. Seine Zerlegung kann durch ein Gelenkmodell realisiert werden.

Analog wird die Zerlegung eines in Grenzen beliebigen Parallelogramms und eines beliebigen Dreiecks gezeigt. Insbesondere werden das DIN-Rechteck und das Goldene Rechteck bearbeitet.

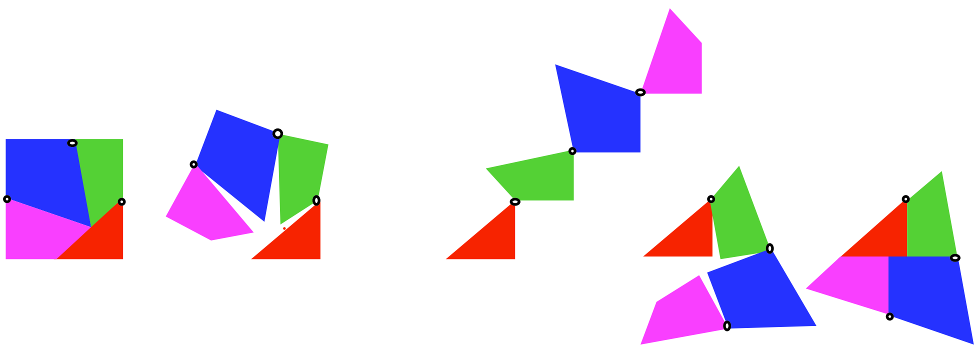
1 Die klassische Figur

Die Zerlegung wird durch die Farben angedeutet.



Die klassische Figur von Dudeney

Die folgende Figur zeigt den Übergang vom Quadrat zum Dreieck in einem Gelenkmodell in mehreren Phasen. Das rote Dreieck, im Quadrat rechts unten, ist dabei immer in derselben Position festgehalten worden.



Gelenkmodell

1.1 Analyse der klassischen Figur

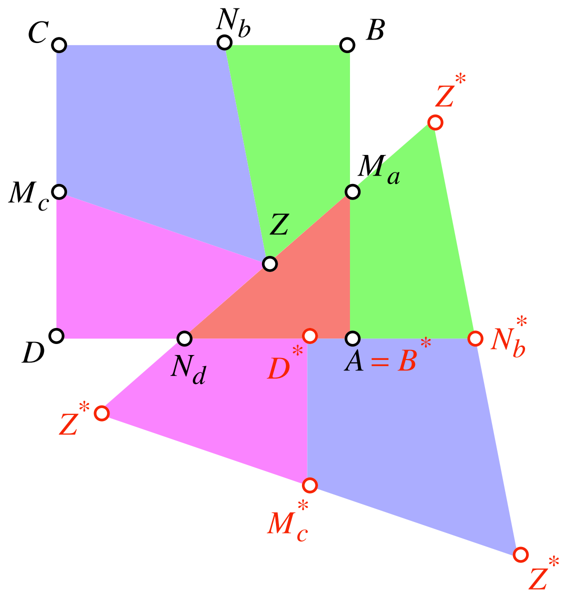
Das Ausgangsquadrat habe die Seite 1, das gleichseitige Dreieck die Seite s. Wegen der Flächengleichheit der Figuren haben wir:

$$1 = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$$

$$s = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$$

Ausgehend von der Länge 1 der Quadratseite kann $\sqrt[4]{3}$ durch zweimalige Anwendung des Höhensatzes konstruiert werden; daraus erhalten wir durch Inversion am Einheitskreis $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Die Seitenlänge s des Dreiecks kann also konstruiert werden.

Weiter verwenden wir die Bezeichnungen der folgenden Figur.



Bezeichnungen

Es gilt folgendes:

M_a ist Mittelpunkt der Strecke AB; M_c ist Mittelpunkt der Strecke CD.

Die drei spitzen Winkel bei Z messen je 60°.

Die beiden Strecken ZN_b und ZM_c messen je $\frac{s}{2}$; das Dreieck ZN_bM_c ist gleichseitig mit der Seitenlänge $\frac{s}{2}$. Dieses Dreieck ist also flächenmäßig ein Viertel des Zieldreieckes. Die Strecke N_bM_c misst ebenfalls $\frac{s}{2}$.

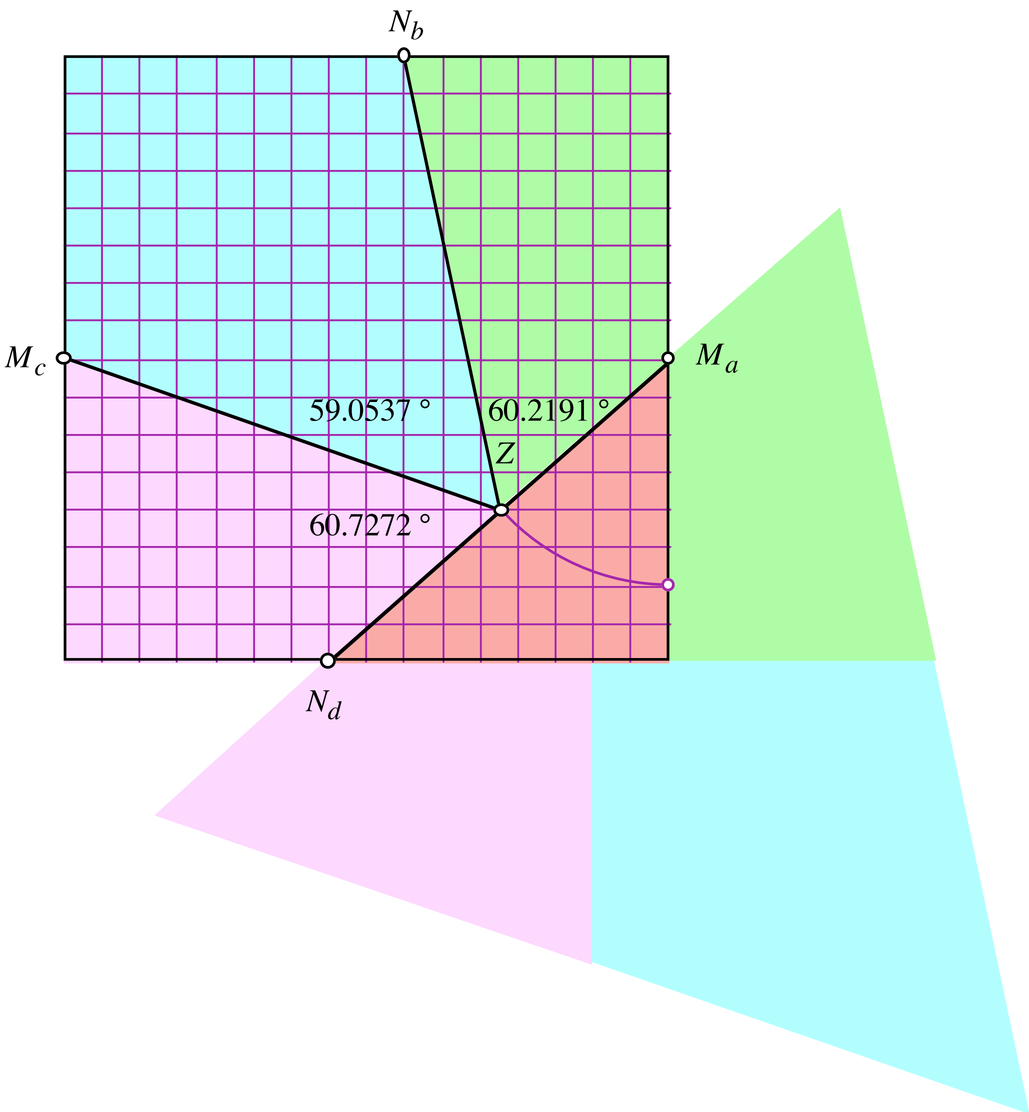
Die Strecke N_dM_a ist parallel zur Strecke N_bM_c und gleich lang, nämlich $\frac{s}{2}$.

1.2 Konstruktionsvorgang

Da s und damit $\frac{s}{2}$ konstruiert werden können, erhalten wir im Quadrat $ABCD$ ausgehend von den Seitenmitten M_a und M_c die beiden Punkte N_b beziehungsweise N_d. Die Strecke N_bM_c können wir zum gleichseitigen Dreieck N_bM_cZ ergänzen. Damit haben wir alle relevanten Punkte der Figur von Dudeney.

1.3 Eine Näherungslösung

Die Figur zeigt eine Näherungslösung im 16×16-Raster. Die Winkel bei Z messen nicht genau 60°.



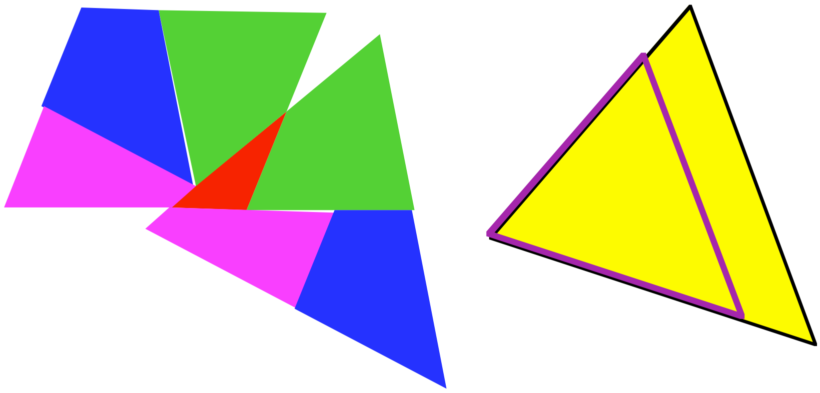
Näherungslösung im Raster

2 Verallgemeinerung

Diese Überlegungen und das konstruktive Vorgehen können auf den Fall eines in Grenzen beliebigen Parallelogramms als Ausgangsfigur und eines beliebigen Dreiecks als Zielfigur übertragen werden.

Parallelogramm und Dreieck müssen flächengleich sein. Um das zu erreichen, formen wird jede der beiden Figuren in ein flächengleiches Quadrat um. Aus den Seitenlängen der beiden Quadrate können wir das Skalierungsverhältnis zur Flächenjustierung ablesen.

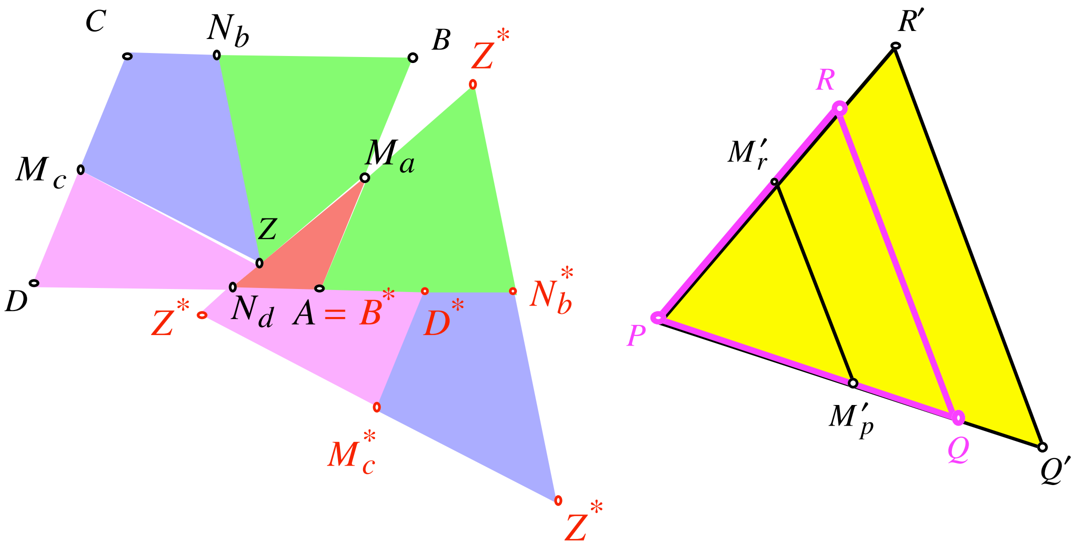
In der folgenden Figur wurde zunächst das violette Dreieck zum gelben Dreieck aufgeblasen, um es dem Parallelogramm links flächengleich zu machen.



Vom Parallelogramm zum Dreieck

2.1 Vorgehen

Das Vorgehen orientiert sich am Sonderfall von Dudeney; wir übernehmen auch die entsprechenden Bezeichnungen. Das Parallelogramm *ABCD* soll zu einem Dreieck umgeformt werden, welches dieselbe Form wie das Dreieck *PQR* hat.



Bezeichnungen

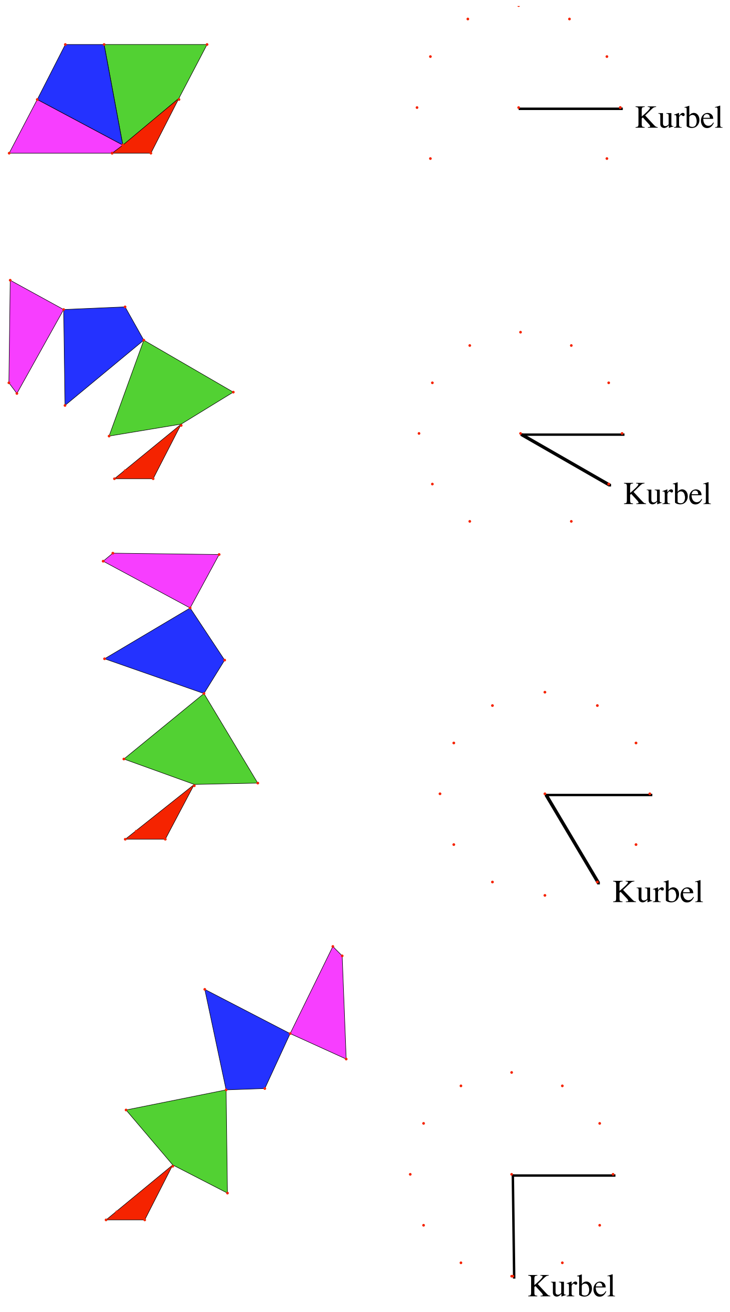
Dazu zoomen wir zunächst dieses Dreieck zum Dreieck $PQ'R'$, so dass die Flächeninhalte übereinstimmen, Nun seien M'_p und M'_r Mittelpunkte der Strecken PQ' beziehungsweise $R'P$; das Dreieck $PM'_qM'_r$ misst also flächenmäßig ein Viertel des Parallelogramms *ABCD*.

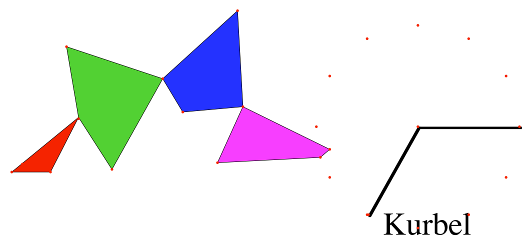
Wir tragen nun vom Mittelpunkt M_c der Seite *CD* eine der Seitenlängen des Dreieckes $PM'_qM'_r$ (in der Figur wurde die Seitenlänge PM'_r verwendet) auf die Seite *BC* (oder *DA*) ab und erhalten den Punkt N_b. Den Punkt N_d konstruieren wir entsprechend. Den Punkt *Z* konstruieren wir so, dass das Dreieck M_cZN_b kongruent zum Dreieck $PM'_qM'_r$ wird. Damit haben wir alle relevanten Punkte der Figur.

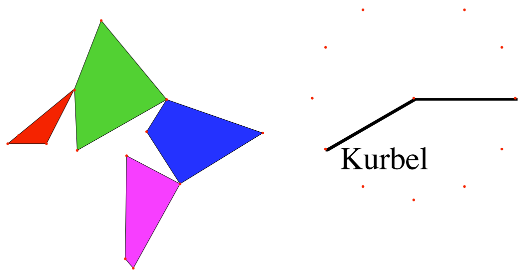
Wir sehen auch, dass wir in der Konstruktion Wahlmöglichkeiten haben. Zu gegebenem Parallelogramm *ABC* und Zieldreieck *PQR* gibt es verschiedene Lösungen.

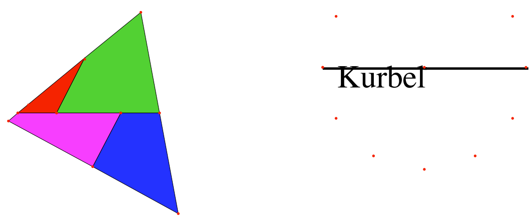
2.2 Animation

Die folgende Figurensequenz zeigt die Verwandlung eines Parallelogramms in ein Dreieck. Die Figur kann auch überdreht werden so dass sich die Einzelteile überlagern.

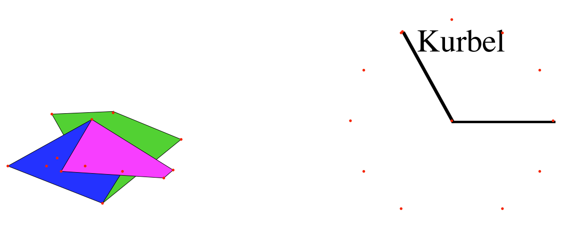


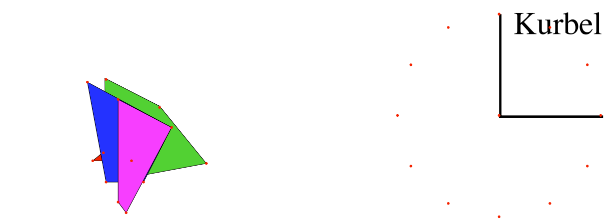

Kurbel


Kurbel


Kurbel


Kurbel


Kurbel


Kurbel

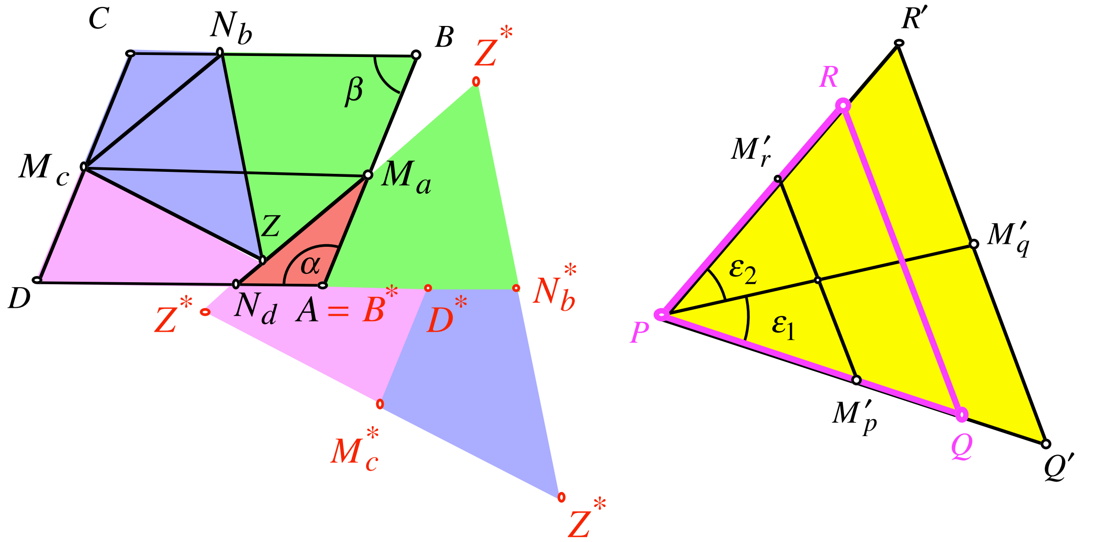

Kurbel


Kurbel


Kurbel

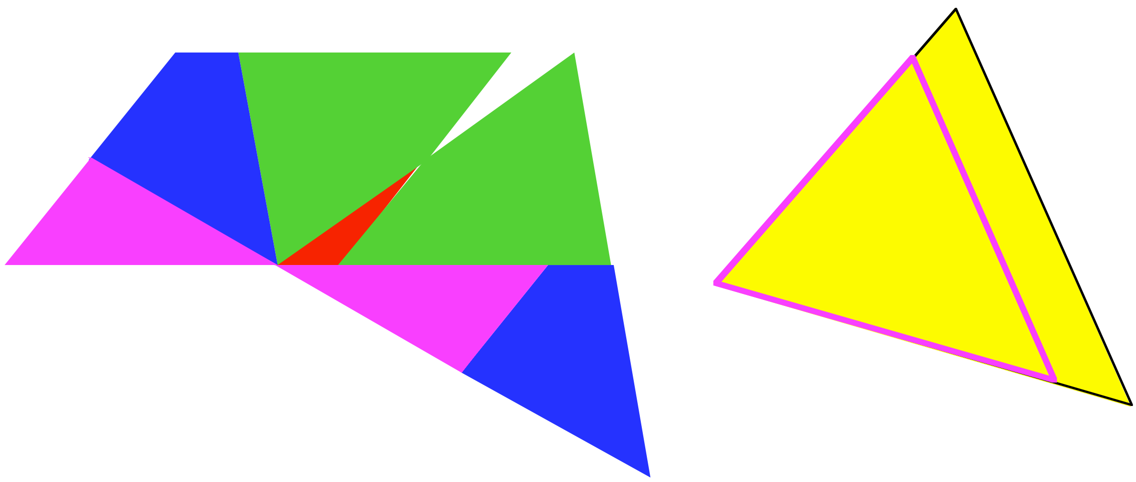
2.3 Grenzen

In der folgenden Bezeichnungsfigur ist M'_q der Mittelpunkt der Strecke $Q'R'$; die Strecke PM'_q ist also eine Schwerlinie des Dreieckes $PQ'R'$.



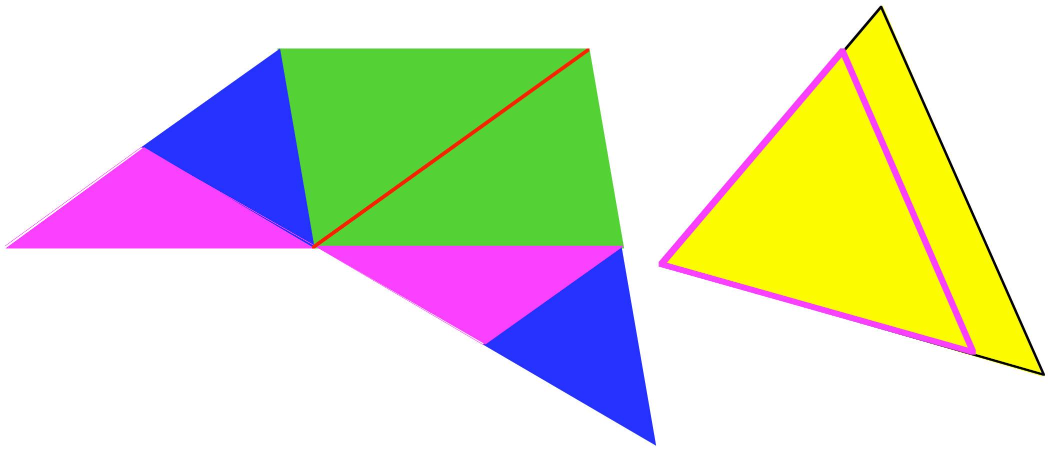
Bezeichnungen

In dieser Bezeichnung muss $b = \overline{M_a M_b} \le \overline{PM'_q}$ gelten. Die folgende Figur zeigt die Grenzsituation für den Fall der Gleichheit. Die Punkte Z, N_d und Z^* fallen zusammen.



Grenzfall

Innerhalb dieses Grenzfalles muss weiter $\varepsilon_1 \leq \alpha \leq \pi - \varepsilon_2$ gelten. Die folgende Figur zeigt den Grenzfall $\alpha = \pi - \varepsilon_2$.



Grenzfall im Grenzfall

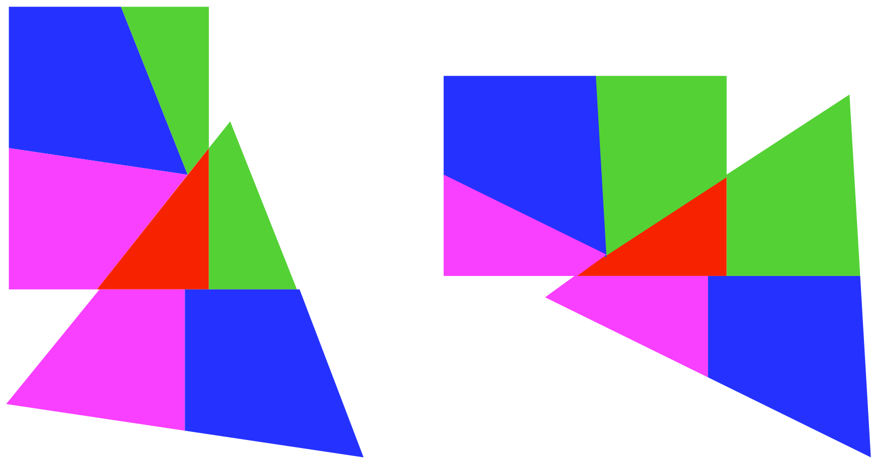
3 Sonderfälle mit Rechtecken und gleichseitigen Dreiecken

Im Folgenden werden als Sonderfälle Rechtecke mit den Seitenlängen a und b gewählt. Diese sollen jeweils in ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge s umgewandelt werden. Dabei wird analog zur Bezeichnung beim Quadrat angenommen, dass die Seite $a = AB$ vertikal und die Seite $b = BC$ horizontal auf dem Zeichenpapier liegt. Für die Seitenlänge s des Zieldreieckes gilt $s = \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{3}}$.

Hochformat und Querformat des Ausgangsrechteckes führen jeweils zu unterschiedlichen Zerlegungen.

3.1 DIN-Format

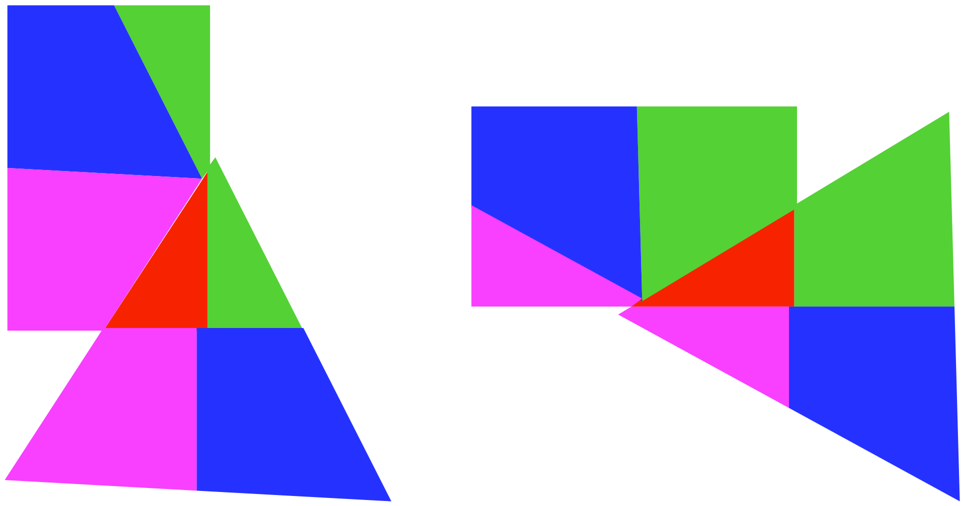
Das Ausgangsrechteck hat das Seitenverhältnis $\sqrt{2} \approx 1.414$.



DIN-Format

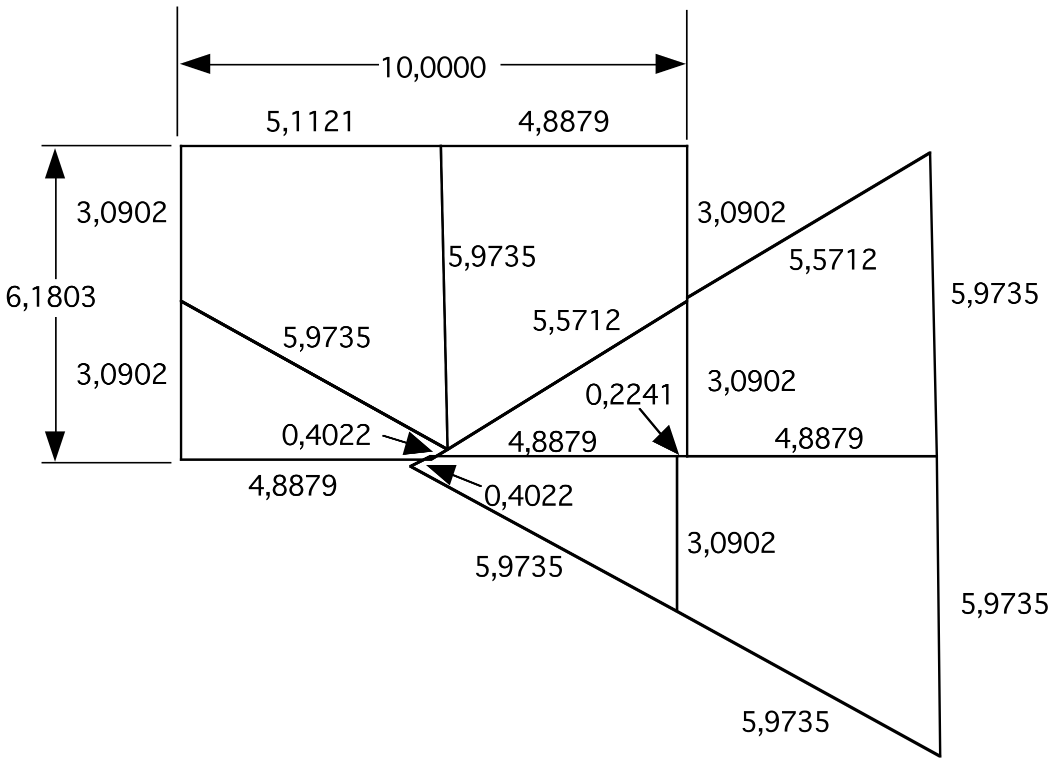
3.2 Goldenes Rechteck

Im Goldenen Rechteck stehen die Rechtecksseiten im Verhältnis des Goldenen Schnittes, also $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.



Goldenes Rechteck

Die folgende Figur zeigt eine Maßskizze für das Goldene Rechteck im Querformat.

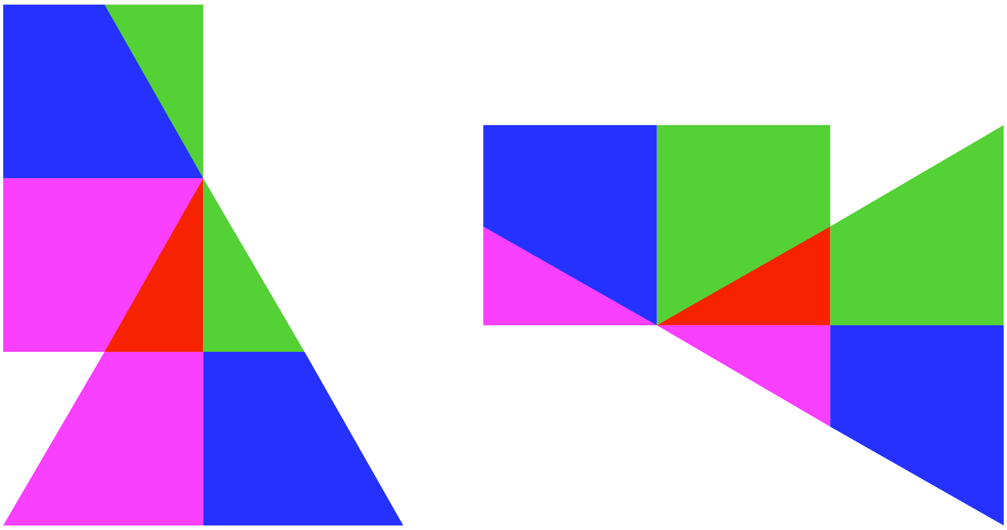


Maßskizze

Das goldene Rechteck ist offenbar schon nahe bei einem Grenzfall.

3.3 Grenzfall

Im Grenzfall hat das Rechteck das Seitenverhältnis $\sqrt{3} \approx 1.732$. Im Grenzfall unterscheiden sich die beiden auf Hoch- beziehungsweise Querformat beruhenden Zerlegungen nur noch in der Farbe und der Anordnung.



Grenzfall