

Hans Walser, [20160110]

Duale Zweiecke

Anregung: Renato Pandi

1 Worum geht es?

Es wird ein Dualitätsprinzip zwischen Zweiecken mit 60° -Winkeln und solchen mit 120° -Winkeln besprochen.

2 Die Zweiecke

Ein Zweieck mit 60° -Winkeln lässt sich auf beliebig viele Arten in ein gleichseitiges Dreieck einpassen. Die Abbildung 1 zeigt zwei spezielle und eine allgemeine Lage. In der allgemeinen Lage berühren die beiden Ecken je eine Dreiecksseite und einer der beiden Kreisbögen ist tangential an die dritte Dreiecksseite.



Abb. 1: Zweieck mit 60° -Winkeln

Ebenso lässt sich ein Zweieck mit 120° -Winkeln auf beliebig viele Arten in ein gleichseitiges Dreieck einpassen. Die Abbildung 2 zeigt zwei spezielle und eine allgemeine Lage. In der allgemeinen Lage berührt eine Ecke eine Dreiecksseite. Die beiden Kreisbögen sind tangential an je eine der beiden weiteren Dreiecksseiten.

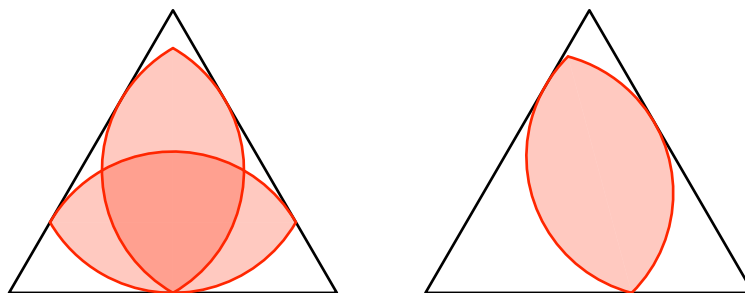


Abb. 2: Zweieck mit 120° -Winkeln

3 Dualität

Die Abbildung 3 zeigt ein Zweieck mit 60° -Winkeln und ein Zweieck mit 120° -Winkeln in einer Überlagerung. Die Ecken des einen Zweiecks sind die Zentren der Bogen des anderen Zweiecks und umgekehrt. Wir bezeichnen Zweieck in dieser Situation als *duale Zweiecke*.

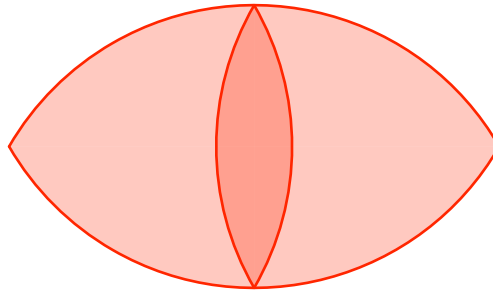


Abb. 3: Duale Zweiecke

Die Figur der Abbildung 3 kann aber auch gesehen werden als teilweise Überlagerung zweier Reuleaux-Dreiecke. Die beiden Reuleaux-Dreiecke haben zwei Ecken gemeinsam. Der Durchschnitt der beiden Reuleaux-Dreiecke ist das Zweieck mit den 60° -Winkeln, die Vereinigung das Zweieck mit den 120° -Winkeln.

4 Einpassen in Dreiecke

Die Abbildung 4 zeigt eine Überlagerung der beiden Abbildungen 1 und 2.

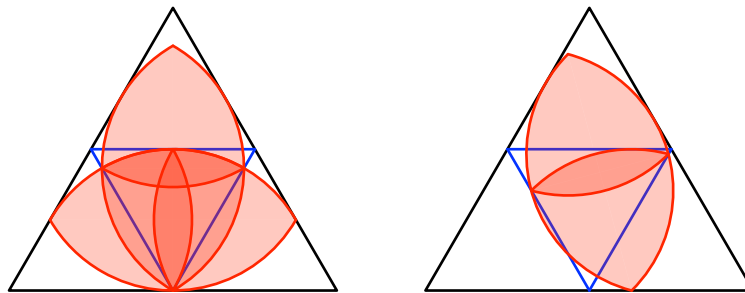


Abb. 4: Überlagerung

Wir vermuten, dass sich die Figur der Abbildung 3 in doppeltem Sinne in ein gleichseitiges Dreieck einpassen lässt: Das Zweieck mit 120° -Winkeln ist in das große gleichseitige Dreieck eingepasst, das Zweieck mit den 60° -Winkeln in das blaue Seitenmittendreieck. Die Abbildung 5 zeigt die Situation für den allgemeinen Fall vergrößert, damit wir die Details besser sehen. Es ist zudem der durch die horizontale Dreiecksseite und die dazu parallele Mittellinie definierte Streifen gelb hervorgehoben.

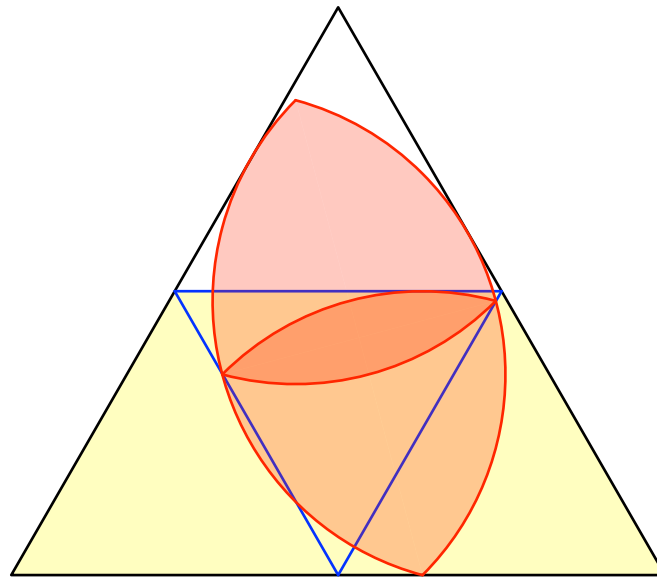


Abb. 5: Allgemeine Lage

Wir sehen, dass eines der beiden Reuleaux-Dreiecke darin operiert. Der Ecke des Zweiecks mit 120° -Winkeln auf der Dreiecksseite liegt im Streifen gegenüber der Berührungspunkt des einen Bogens des Zweiecks mit 60° -Winkeln mit der Mittellinie.

Analog finden wir ein Reuleaux-Dreieck in jedem der beiden anderen Parallelstreifen des Dreiecks. Hier korrespondiert der Berührungspunkt des Bogens des Zweiecks mit 120° -Winkeln der Ecke des Zweiecks mit 60° -Winkeln.

Das heißt, dass aus der Einpass-Eigenschaft der Zweiecke mit 60° -Winkeln die Einpass-Eigenschaft der Zweiecke mit 120° -Winkeln folgt und umgekehrt.

5 Ein Schnittpunkt

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir drei Paare korrespondierender Punkt festgestellt. Je ein Punkt eines Paares gehört zum Zweieck mit 60° -Winkeln, der andere zum Zweieck mit 120° -Winkeln. Einer der beiden Punkte eines Paares ist ein Eckpunkt eines Zweiecks, der andere der Berührungspunkt eines Zweieckbogens mit einer Dreiecksseite. Korrespondierende Punkte liegen in einem Streifen einander gegenüber, also auf einer Streifennormale.

In der Abbildung 6 sind die drei Streifennormalen lila eingezeichnet. Wir sehen, dass die drei Normalen einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

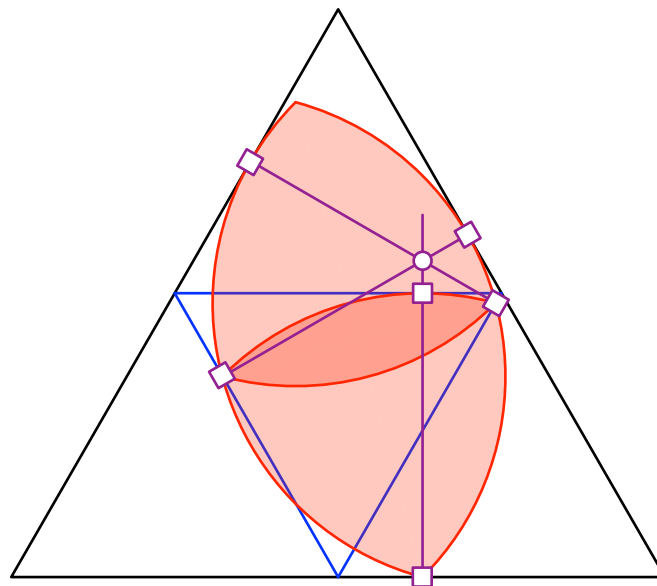


Abb. 6: Schnittpunkt der drei Normalen

Das lässt sich nach (Reuleaux, 1875) mit einer kinematischen Überlegung einsehen. Die rote Figur ist drehbar im Dreieck wobei der Drehpunkt andauernd wechselt. Die Normale in den momentanen Berührungspunkten verlaufen alle durch den momentanen Drehpunkt, sie sind also kopunktal.

Die Abbildung 7 schließlich zeigt die lila Ortslinie der momentanen Drehpunkte beim Drehen der Zweiecke in den Dreiecken. Diese Ortslinie ist ihrerseits ein Reuleaux-Dreieck.

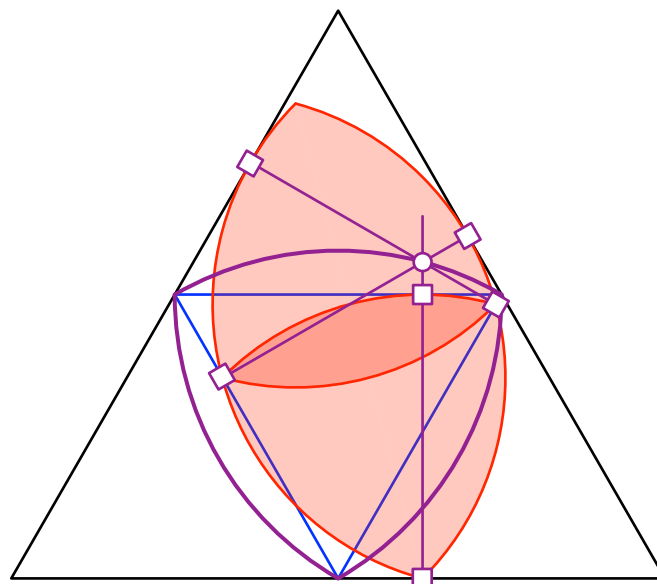


Abb.7: Ortslinie der momentanen Drehpunkte

Für den Beweis benötigte der Autor einige Rechnung.

Literatur

Reuleaux, F. (1875): Lehrbuch der Kinematik. Erster Band: Theoretische Kinematik.

Braunschweig: Vieweg.

e-Version:

<https://ia700409.us.archive.org/29/items/lehrbuchderkine01reulgoog/lehrbuchderkine01reulgoog.pdf>