Hans Walser, [20080105b]

Dualbrüche

1 Problemstellung

Für $x \in [0,1]$ soll eine Dualbruchdarstellung gefunden und visualisiert werden.

2 Pseudodualbruch

Das MuPAD Programm gibt effektiv einen Dezimalbruch, der aber so aussieht wie das gesucht Resultat.

```
x:=3/5:

n:=12:

bin:=proc(x)
 begin
  s:=0:
  for i from 1 to n do
   if 2*x<1 then s:=s: x:=2*x
    else s:=s+(1/10)^i: x:=2*x-1
   end_if
  end_for:
  float(s);
 end_proc:

print(NoNL, x):
print(Unquoted, " entspricht ".bin(x)):

3/5 entspricht 0.100110011
```

Die Stellenanzahl ist beschränkt.

3 Dualbruch

Das folgende Programm berechnet echt die Ziffern. Die Stellenzahl n ist unbeschränkt.

```
x:=3/5:

n:=32:

x1:=x:

for i from 1 to n do
 if x1<1/2 then
  y[i]:=0:
  x1:=2*x1:
 else
  y[i]:=1:
  x1:=2*x1-1:
 end_if:
```

```
end_for:

print(NoNL, x):

print(NoNL, " entspricht 0."):

for i from 1 to n do
 print(NoNL, y[i]):
end_for:
```

```
3/5 entspricht 0.100110011001100110011001100110011001
```

4 OL-Darstellung

Variante in der OL_Darstellung.

```
x:=3/5:

n:=24:

x1:=x:

for i from 1 to n do
 if x1<1/2 then
  y[i]:="O":
  x1:=2*x1:
 else
  y[i]:="L":
  x1:=2*x1-1:
 end_if:
end_for:

print(NoNL, x):

print(NoNL, " entspricht O."):

for i from 1 to n do
 print(NoNL, y[i]):
end_for:
```

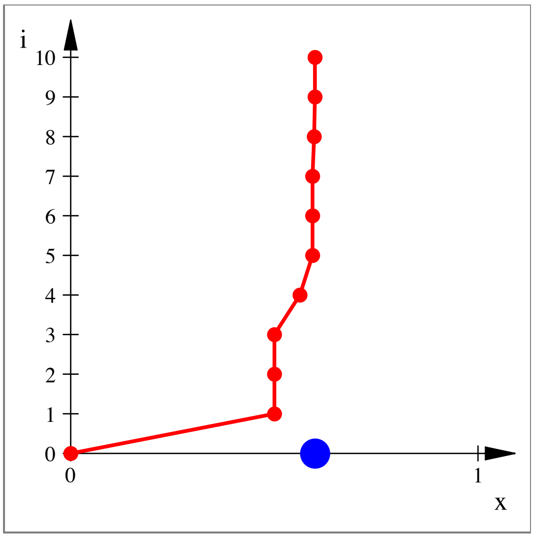
```
3/5 entspricht O.LOOLLOOLLOOLLOOLLOOLLOOL
```

5 Monotone Grafik

Der Wert wird von links her angeschlichen. Jede 1 (oder jedes L) bedeutet Weg nach rechts oben, jede 0 (oder jedes O) bedeutet Weg senkrecht nach oben.

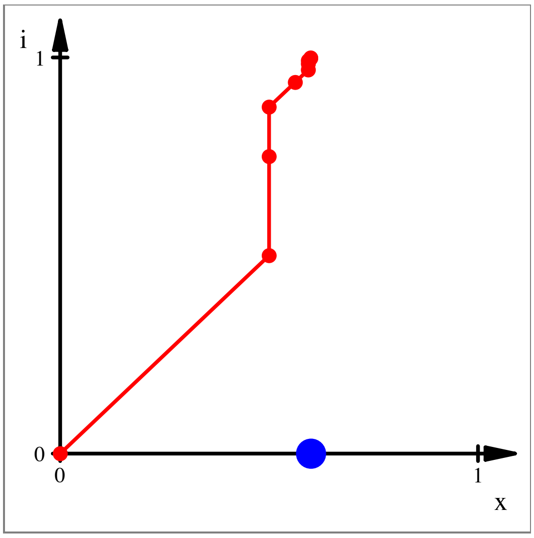
```
x:=3/5:

x1[0]:=0:

x0:=x:

for i from 1 to n do
 if x0<1/2 then
  x1[i]:=x1[i-1]:
  x0:=2*x0:
 else
  x1[i]:=x1[i-1]+(1/2)^i:
  x0:=2*x0-1:
 end_if:
end_for:

start:=plot::Point2d([x,0],PointSize=4, PointColor=[0,0,1] ):

punkt:=plot::PointList2d([[x1[i],i]$i=0..n], PointSize=2,
PointColor=[1,0,0]):

pol:=plot::Polygon2d([[x1[i],i]$i=0..n], LineWidth=1/2,
LineColor=[1,0,0]):

plot(pol, punkt, start,  TicksDistance=1, TicksBetween=0,
ViewingBox=[0..1, 0..n], AxesTitles = ["x", "i"],
Width=70, Height=70, BorderWidth=1/4*unit::mm);
```

Das ergibt für $x = \frac{3}{5}$ folgendes Bild:



Anschleichen von links

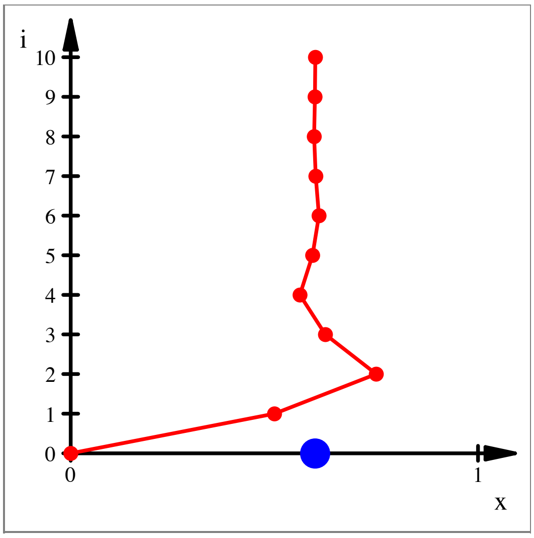
Man kann auch die Steigung vereinheitlichen; dann hat die ganze Grafik im Einheitsquadrat Platz.



Einheitliche Steigung

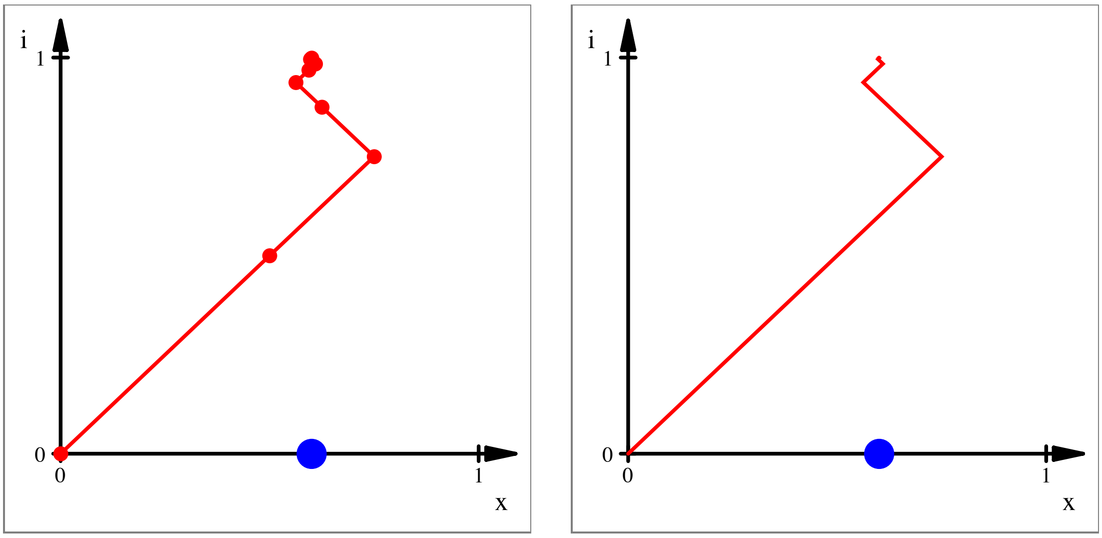
6 Zickzack-Grafik

Der Wert wird allenfalls übersprungen. Für $x = \frac{3}{5}$ erhalten wir:



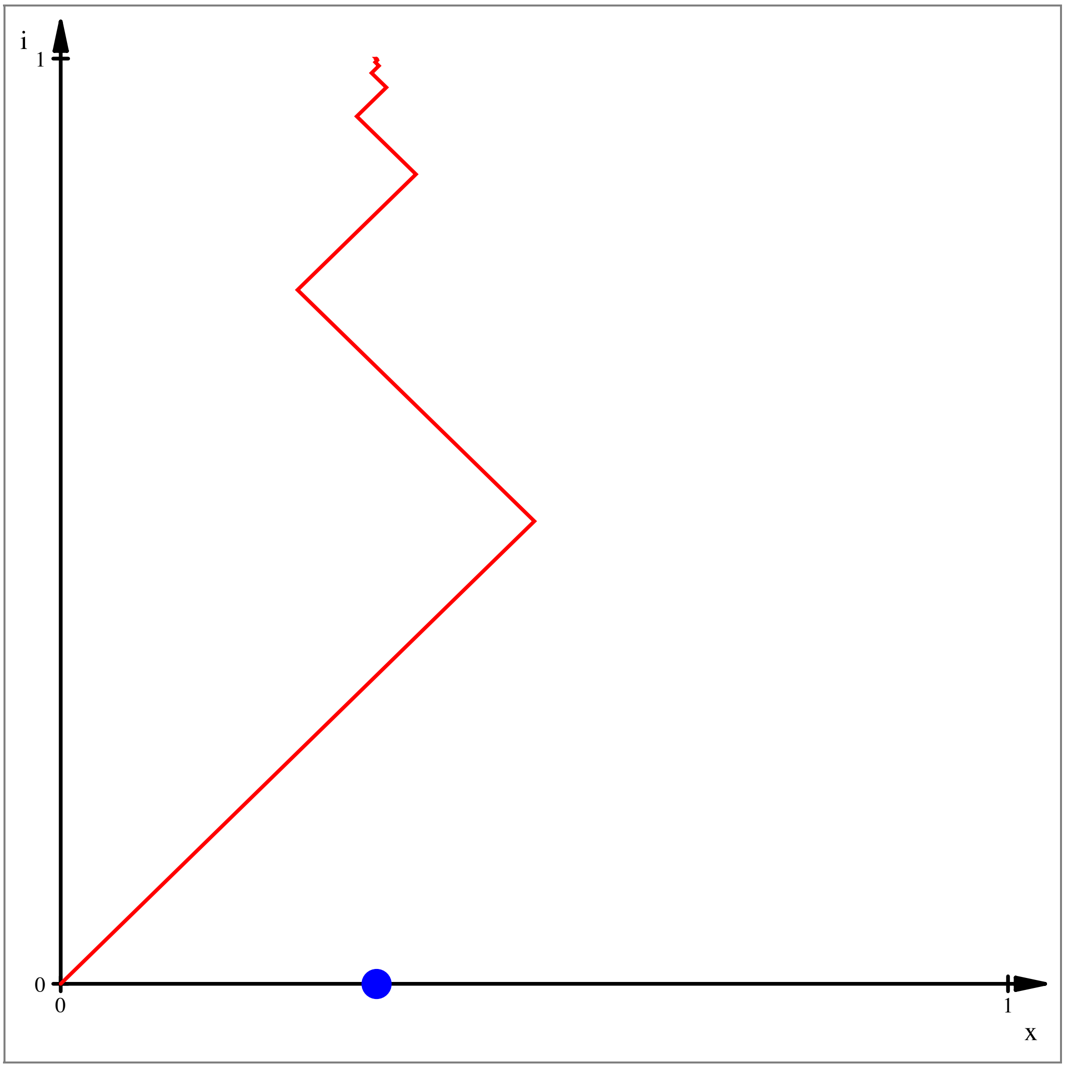
Zickzack

Auch hier kann die Steigung vereinheitlicht werden. Wegen der Periodizität von $x = \frac{3}{5}$ mit der Periodenlänge 4 ist die Zickzacklinie selbstähnlich (Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. Auf Grund der geringen Auflösung ist das in der Figur schlecht sichtbar.



Einheitliche Steigung

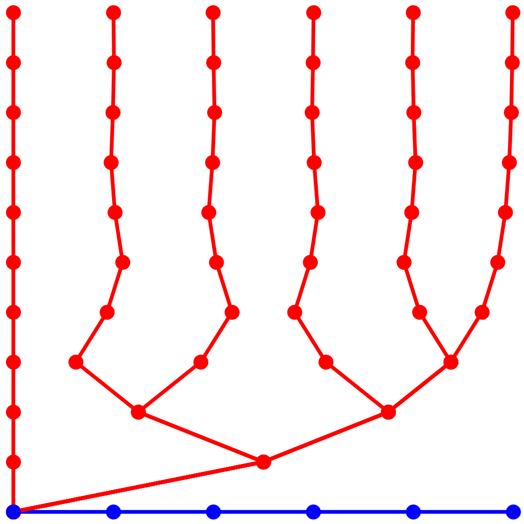
Die folgende Figur zeigt die Selbstähnlichkeit für $x = \frac{1}{3} \mathrel{\hat{=}}$ O.OLOLOL... =O.$\overline{\text{OL}}$. Die Periodenlänge ist 2, der Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$



Selbstähnlichkeit

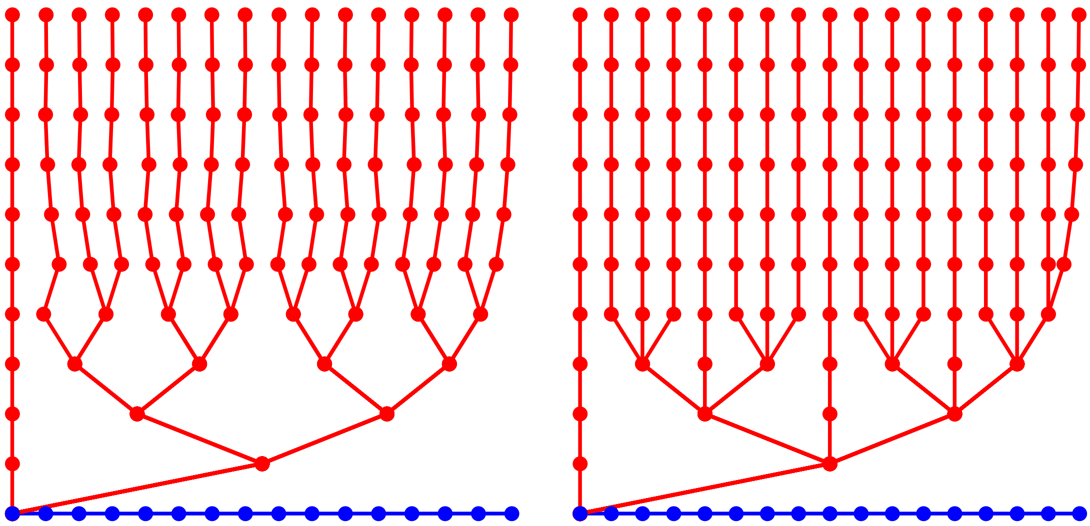
7 Mehrfachgrafiken

Für sämtliche Fünftel ergibt sich:



Fünftel

Für Fünfzehntel und Sechzehntel erhalten wir eine unregelmäßige respektive eine recht regelmäßige Figur, weil 16 eine Potenz von 2 ist.



Fünfzehntel und Sechzehntel