Hans Walser, [20180330]

Dritteln mit Origami

1 Worum geht es?

Mit einer Einschiebe-Methode kann die Seite eines Origami-Papiers gedrittelt werden. Verallgemeinerung.

2 Dritteln

2.1 Faltvorgang

Wir markieren den Mittelpunkt der linken Seite (kann durch Falten ermittelt werden) und die untere Seite rot, die Ecke rechts unten und die obere Seite blau (Abb. 1a).

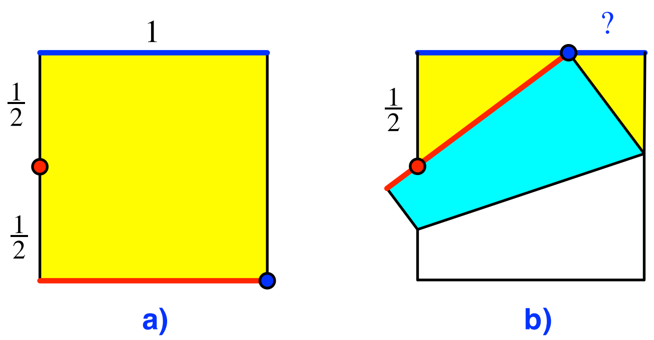


Abb. 1: Faltvorgang

Nun falten wir so, dass die rote Seite auf den roten Punkt und der blaue Punkt auf die blaue Seite zu liegen kommen (Abb. 1b). Die kurze blaue Strecke ist dann ein Drittel der blauen Seite des Origami-Papiers.

2.2 Beweis durch Rechnen

Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung 2.

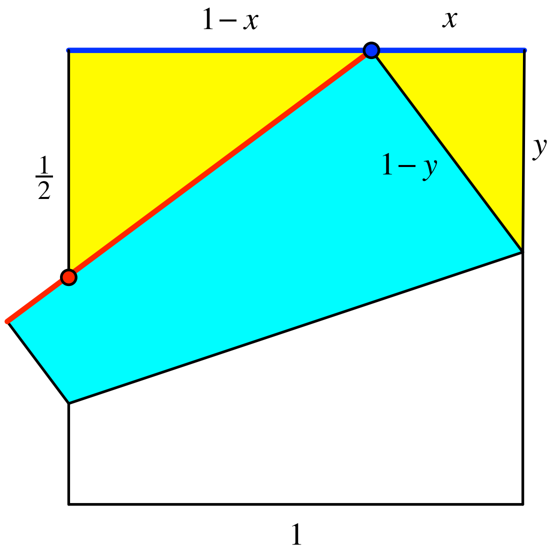


Abb. 2: Daten und Bezeichnungen

Aus der Ähnlichkeit der beiden gelben Dreiecke folgt:

$$\frac{y}{x} = \frac{1-x}{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = 2x(1-x) \tag{1}$$

Der Satz des Pythagoras gibt für das rechtwinklige gelbe Dreieck rechts oben:

$$x^2 + y^2 = (1-y)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1-2y \quad \Rightarrow \quad y = \tfrac{1}{2}\left(1-x^2\right) = \tfrac{1}{2}(1-x)(1+x) \tag{2}$$

Gleichsetzen von (1) und (2) ergibt die quadratische Gleichung:

$$2x(1-x) = \tfrac{1}{2}(1-x)(1+x) \tag{3}$$

Die quadratische Gleichung (3) hat die beiden Lösungen:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \tfrac{1}{3} \tag{4}$$

Tatsächlich ist auch die erste Lösung richtig (Abb. 3). Sie ist ein Grenzfall des Faltprozesses.

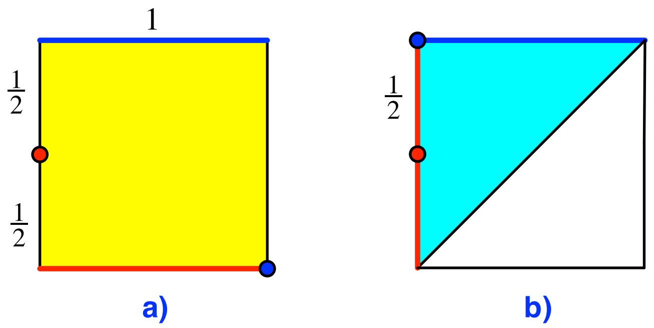


Abb. 3: Illustration der ersten Lösung

Die Abbildung 4 gibt weitere Daten zur zweiten Lösung.

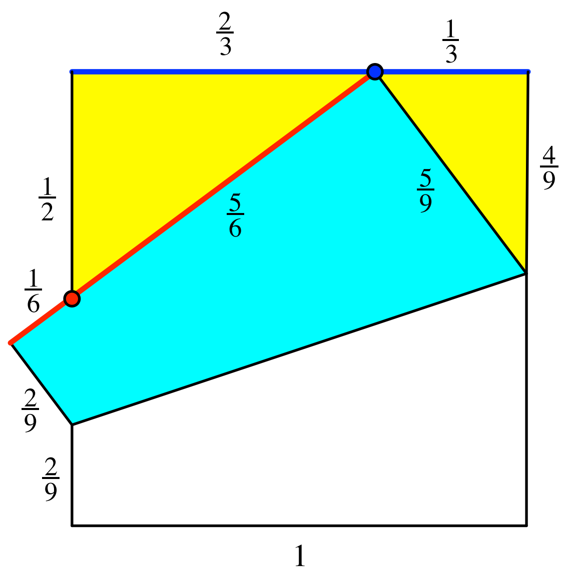


Abb. 4: Weitere Daten

Die beiden gelben rechtwinkligen Dreiecke haben das Seitenverhältnis 3:4:5, sind also „Lehrerdreiecke“ (einfachstes pythagoreisches Dreieck).

2.3 Klassische Methode

Zur Erinnerung: Die Abbildung 5 illustriert die klassische Methode der Seitendrittelung. Es braucht sehr viel mehr Faltlinien, dafür kann der Beweis linear geführt werden.

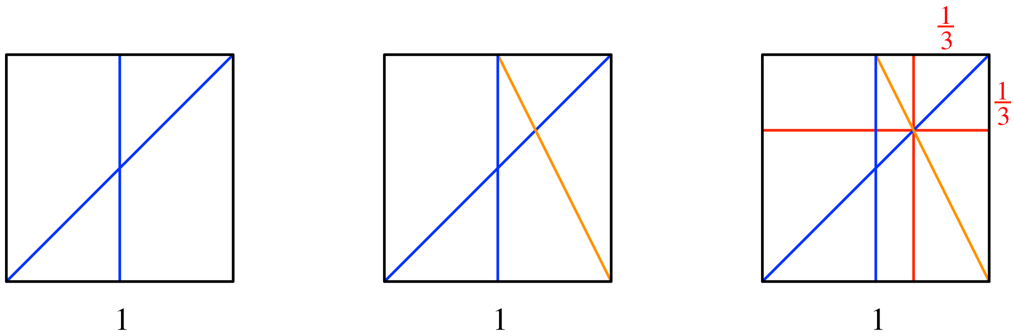


Abb. 5: Klassische Methode

3 Verallgemeinerung

Die Abbildung 6 illustriert eine Verallgemeinerung.

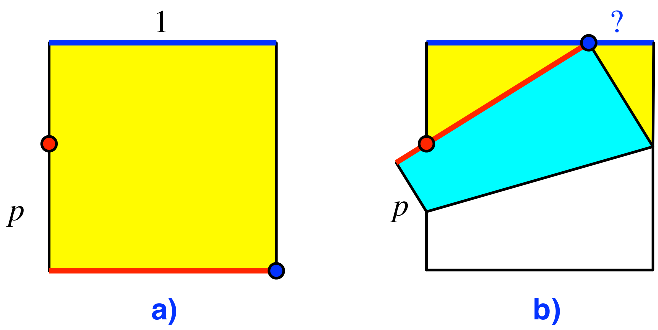


Abb. 6: Verallgemeinerung

Mit den zur Abbildung 2 analogen Bezeichnungen finden wir:

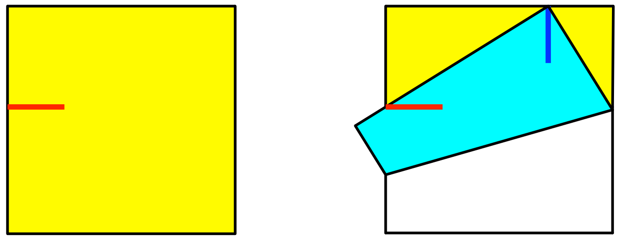
$$x(p) = \frac{1-p}{1+p} \tag{5}$$

Diese Zuordnung hat es in sich. Es ist nämlich:

$$x(x(p)) = \frac{1-\frac{1-p}{1+p}}{1+\frac{1-p}{1+p}} = \frac{1+p-(1-p)}{1+p+1-p} = \frac{2p}{2} = p \tag{6}$$

Das „Zurückkommen“ kann wie folgt mit Falten illustriert werden.

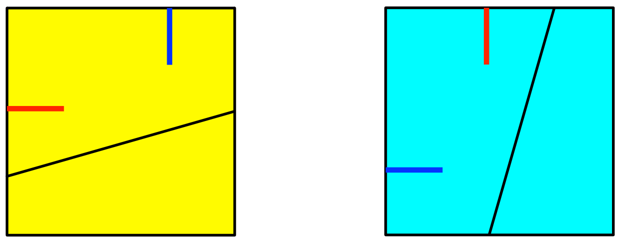
Wir bringen am linken Rand eine Faltmarke an (Abb. 7a). Die Faltmarke hat den Vorteil, dass sie auf beiden Seiten des Papiers sichtbar ist. Und nun falten wir wie gehabt, also die untere Quadratseite auf die rote Marke und die rechte untere Quadratecke auf die Oberseite des Quadrates. Wir bringen am oberen Rand eine weitere Faltmarke gemäß Abbildung 7b an. Das ist der Ort, wo die rechte untere Quadratecke auf der Oberseite ankommt.



a) b)

Abb. 7: Erster Schritt

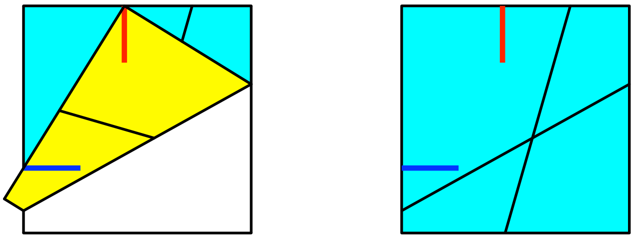
Wir falten auf (Abb. 8a) und wenden das Papier um die von links oben nach rechts unten laufende Diagonale (Abb. 8b).



a) b)

Abb. 8: Auffalten und Umwenden

Nun falten wir mit vertauschten Rollen (Abb. 9a) und stellen fest, dass die rechte untere Quadratecke genau bei der roten Marke ankommt. Dies ist das „Zurückkommen“.

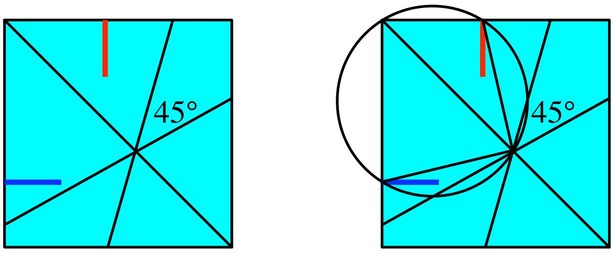


a) b)

Abb. 9: Falten mit vertauschten Rollen

Wir falten wieder auf (Abb. 9b).

Vermutungen (Abb. 10):



a) b)

Abb. 10: Vermutungen

Die beiden Faltlinien schneiden sich unter einem Winkel von 45°.

Der Schnittpunkt liegt auf der von links oben nach rechts unten laufenden Quadratdiagonale.

Der Schnittpunkt der Faltlinien, die beiden Faltmarken und eine Ecke des Quadrates liegen auf einem Kreis.