

## Dritteln durch Halbieren

### 1 Fragestellung

Wie kann eine Strecke  $AB$  gedrittelt werden, wenn folgende Hilfsmittel zur Verfügung stehen?

- Halbieren einer Strecke
- Gerade durch zwei Punkte
- Schneiden zweier Geraden

### 2 Der mühsame Weg übers Unendliche

Wir halbieren die Strecke  $AB$  und nennen den Mittelpunkt  $M_1$ . Dann sei  $M_2$  der Mittelpunkt der Strecke  $AM_1$ ;  $M_3$  der Mittelpunkt der Strecke  $M_1M_2$  und allgemein  $M_{i+1}$  der Mittelpunkt der Strecke  $M_{i-1}M_i$ . Ferner sei  $D = \lim_{i \rightarrow \infty} (M_i)$ . Dieser Punkt  $D$  drittelt die Strecke  $AB$ .



#### Fortgesetztes halbieren

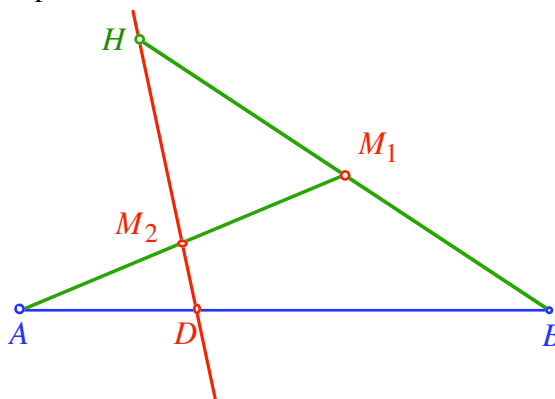
Der Beweis geht über die geometrische Folge. Wir setzen  $AB = 1$  und erhalten:

$$AD = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \pm \dots = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = - \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

Dieses Verfahren ist in der Theorie exakt, in der Praxis können wir nur näherungsweise arbeiten.

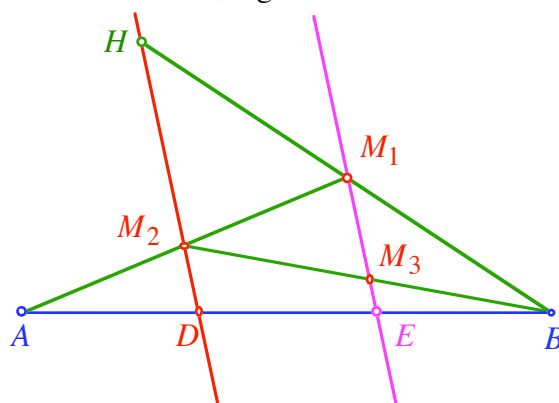
### 3 Der elegante Weg

Wir wählen einen Hilfspunkt  $H$  außerhalb der Geraden  $AB$ . Dann sei  $M_1$  der Mittelpunkt der Strecke  $BH$  und  $M_2$  der Mittelpunkt der Strecke  $AM_1$ . Die Gerade  $HM_2$  schneidet  $AB$  im Drittpunkt  $D$ .



#### Zwei Mal halbieren

Wenn wir noch einmal mehr halbieren, ergibt sich der zweite Drittelpunkt.

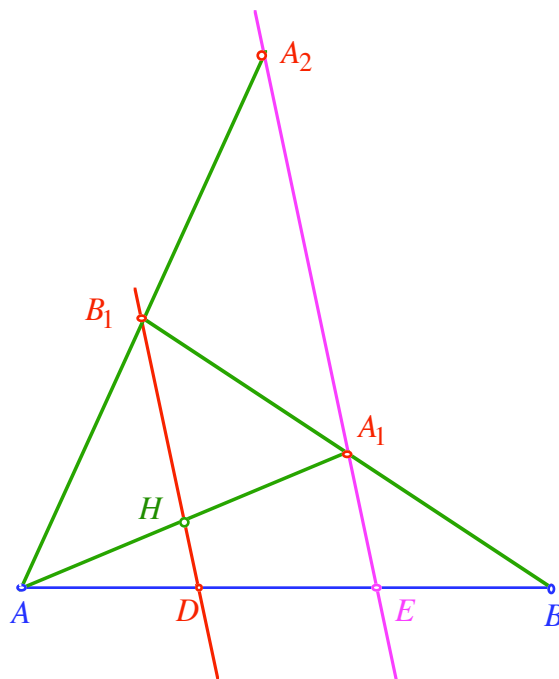


**Drei Mal halbieren**

Jetzt sehen wir auch sofort, wie die Sache zu beweisen ist, nämlich mit Strahlensätzen.

#### 4 Verdoppeln

Natürlich geht es auch mit Verdoppeln, genauer: mit Punktspiegeln. Wir wählen wiederum einen Hilfspunkt  $H$ . Dann spiegeln wir  $A$  an  $H$  und erhalten  $A_1$ . Nun spiegeln wir  $B$  an  $A_1$  und erhalten  $B_1$ . Nun spiegeln wir noch  $A$  an  $B_1$  und erhalten  $A_2$ . Die Gerade  $HB_1$  schneidet  $AB$  im Drittelpunkt  $D$ , die Gerade  $A_1A_2$  schneidet  $AB$  im anderen Drittelpunkt  $E$ .

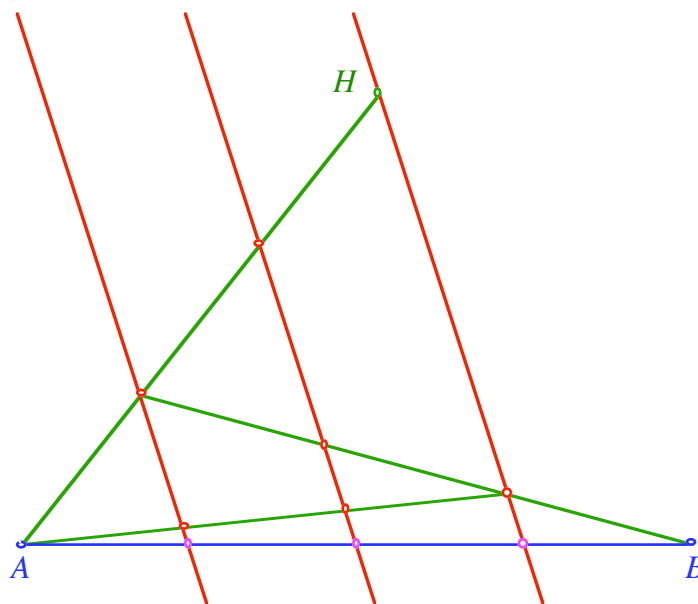


**Verdoppeln**

#### 5 Dritteln

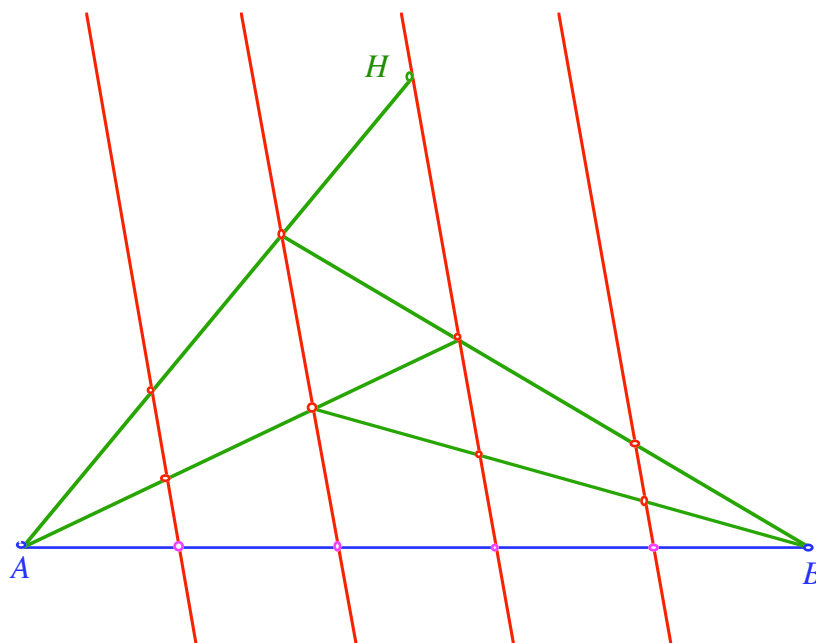
Nehmen wir an, wir hätten statt einem Halbierungswerkzeug ein Drittelungswerkzeug. Dieses Drittelungswerkzeug haben wir ja nach unseren Überlegungen mit dem Halbierungswerkzeug ebenfalls zur Verfügung. Was können wir damit tun?

Wie Figura zeigt, können wir die Strecke  $AB$  nun vierteln.



**Drei Mal dritteln ergibt vierteln**

Wir können aber auch fünfteln.



**Vier Mal dritteln ergibt fünfteln**

Allgemein: Mit einem Werkzeug, welches eine Strecke in  $n$  Teile teilen kann, können wir eine Strecke auch in  $n + 1, n + 2, \dots, 2n - 1$  Teile teilen.

Damit folgt induktiv, dass wir mit eine Halbierungswerkzeug eine Strecke in beliebig viele Teile teilen können.