Hans Walser, [20140924]

Drittel-Linien

Anregung: A. K., V.

1 Worum geht es?

Im Viereck halbieren sich die Mittenlinien gegenseitig. Diese Eigenschaft wird verallgemeinert.

2 Mittenlinien

Im Viereck halbieren sich die Mittenlinien gegenseitig (Abb. 1a).

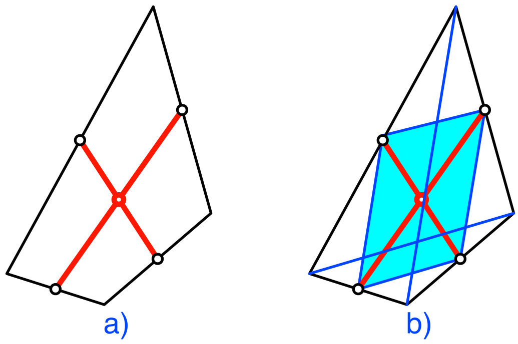

Abb. 1: Mittenlinien halbieren sich

Der Beweis läuft so: Die Seitenmitten des Viereckes bilden ein Parallelogramm, dessen Seiten parallel zu den Viereckdiagonalen sind.

3 Drittel-Linien

Die Drittel-Linien dritteln sich gegenseitig (Abb. 2). Beweis?

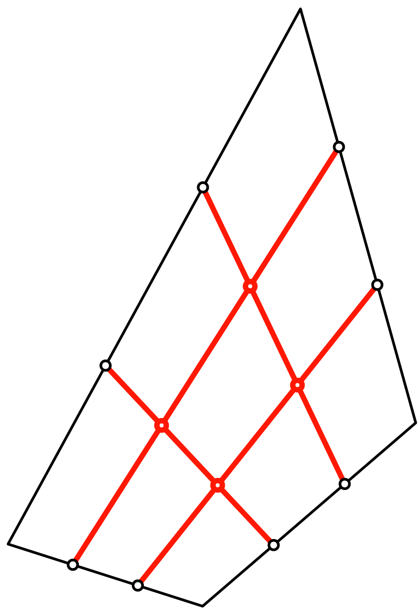

Abb. 2: Drittel-Linien

4 Sonderfall Trapez

Im Sonderfall eines Trapezes ergibt sich die Drittel-Eigenschaft aus den Strahlensätzen (Abb. 3).

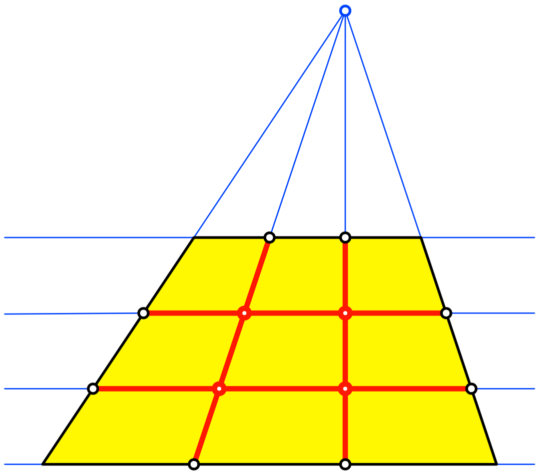

Abb. 3: Sonderfall Trapez

5 Zehntel-Linien

Die Abbildung 4 zeigt Zehntel-Linien, garniert mit Parallelogrammen.

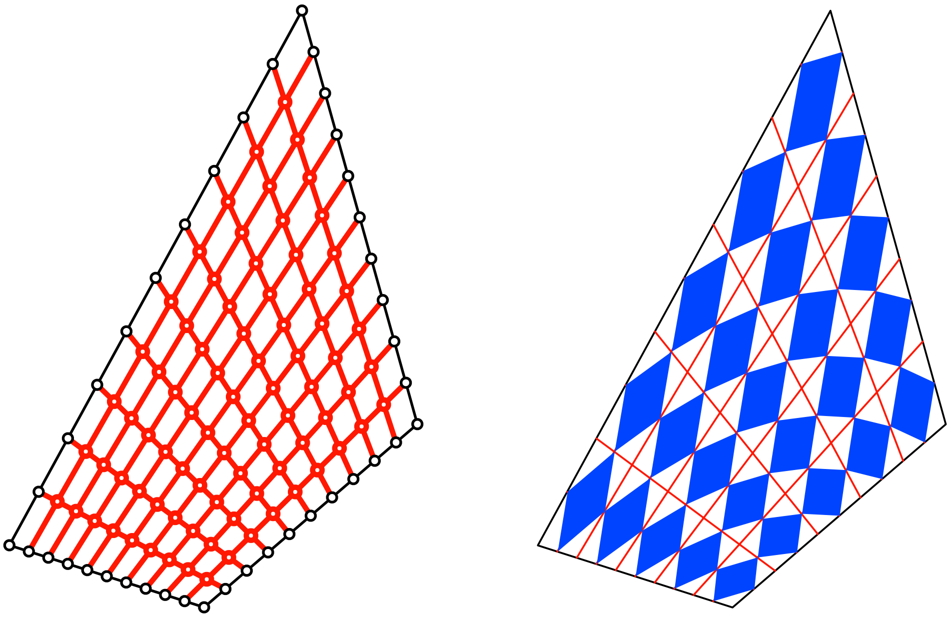

Abb. 4: Zehntel-Linien

6 Beweis für den allgemeinen Fall

Wir teilen zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks im Verhältnis λ, die beiden anderen Seiten im Verhältnis μ. Wir verbinden dann die Teilpunkte gegenüberliegender Seiten. Zu zeigen ist: diese Verbindungslinien teilen sich gegenseitig in den Verhältnissen λ und μ.

Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung 5.

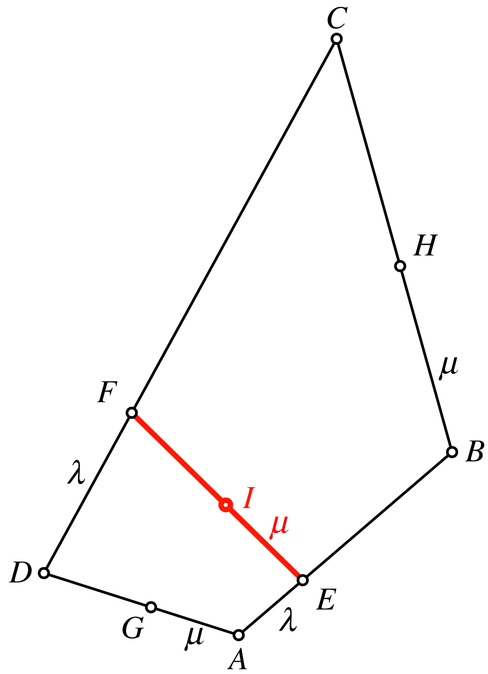

Abb. 5: Bezeichnungen

Zunächst teilen wir die Seiten AB und DC im gleichen Verhältnis λ. Es ist also:

$$\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{DF} = \lambda \overrightarrow{DC}$$

In der Abbildung 4 ist $\lambda = 0.3$.

Dann teilen wir die Strecken AD, BC und EF im gleichen Verhältnis μ:

$$\overrightarrow{AG} = \mu \overrightarrow{AD} \quad , \quad \overrightarrow{BH} = \mu \overrightarrow{BC} \quad , \quad \overrightarrow{EI} = \mu \overrightarrow{EF}$$

In der Abbildung 4 ist $\mu = 0.45$.

Zu zeigen ist: Die Strecke GH wird durch die Strecke EF in I geschnitten und im Verhältnis λ geteilt, also:

$$\overrightarrow{GI} = \lambda \overrightarrow{GH}$$

Das ist eine Vektorerei. Es ist:

$$\overrightarrow{AG} = \mu\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$$

$$\overrightarrow{EI} = \mu\left((1-\lambda)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + (1-\lambda)\overrightarrow{CD}\right)$$

Weiter ist:

$$\overrightarrow{AI} = \lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EI} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AB} - \lambda\mu \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{CD} - \lambda\mu \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BC}$$

Und weiter:

$$\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AB} - \lambda\mu \overrightarrow{AB} - \lambda\mu \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \mu \overrightarrow{AB} - \mu \overrightarrow{CD}$$

Somit ist:

$$\overrightarrow{GI} = \lambda \overrightarrow{GH}$$

Dies war zu beweisen.

7 Viereckraster

Für ganze Zahlen λ und μ erhalten wir ein Viereckraster wie folgt. Wir verlängern die Viereckseiten und tragen Vielfache der Seitenlängen ab (Abb. 6).

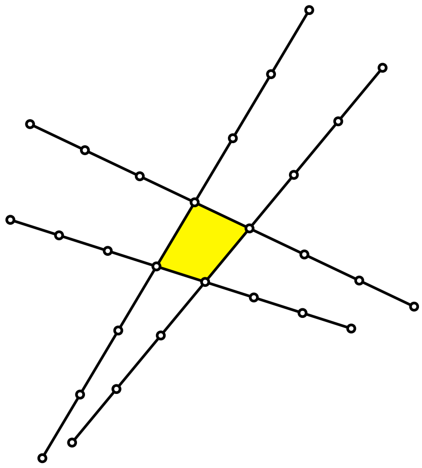

Abb. 6: Erster Schritt

Anschließend ergänzen wir zum Viereckraster (Abb. 7).

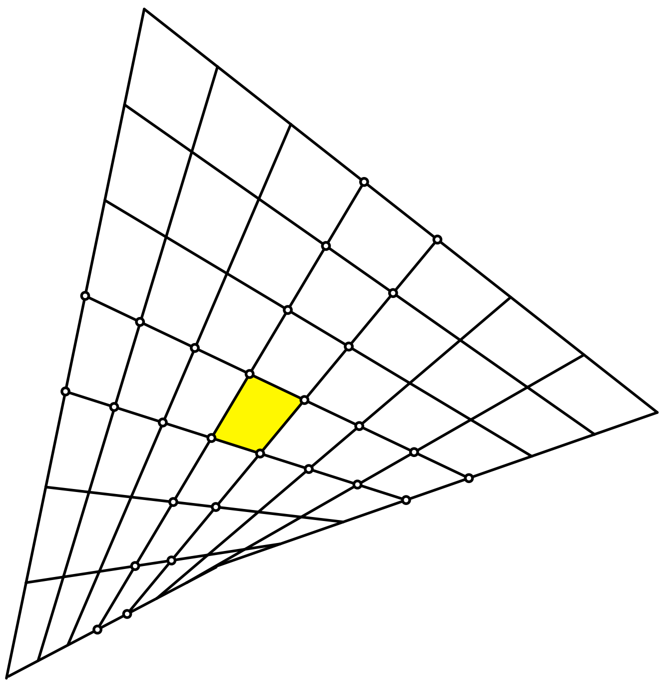

Abb. 7: Viereckraster

Jede Rasterlinie der einen Schar wird von den Rasterlinien der anderen Schar in gleichmäßigen Abständen geschnitten. Deshalb handelt es sich *nicht* um ein so genanntes Moebius-Netz, also ein projektives Bild des Quadratrasters.

Wir sehen, dass sich beim Überschneiden der Linien was Spannendes anbahnt.

8 Parabel

Wenn wir das Viereckraster fortsetzen, überschneiden sich die Rasterlinien. Als Enveloppe entsteht eine Parabel (Abb. 8). Beweis weggelassen.

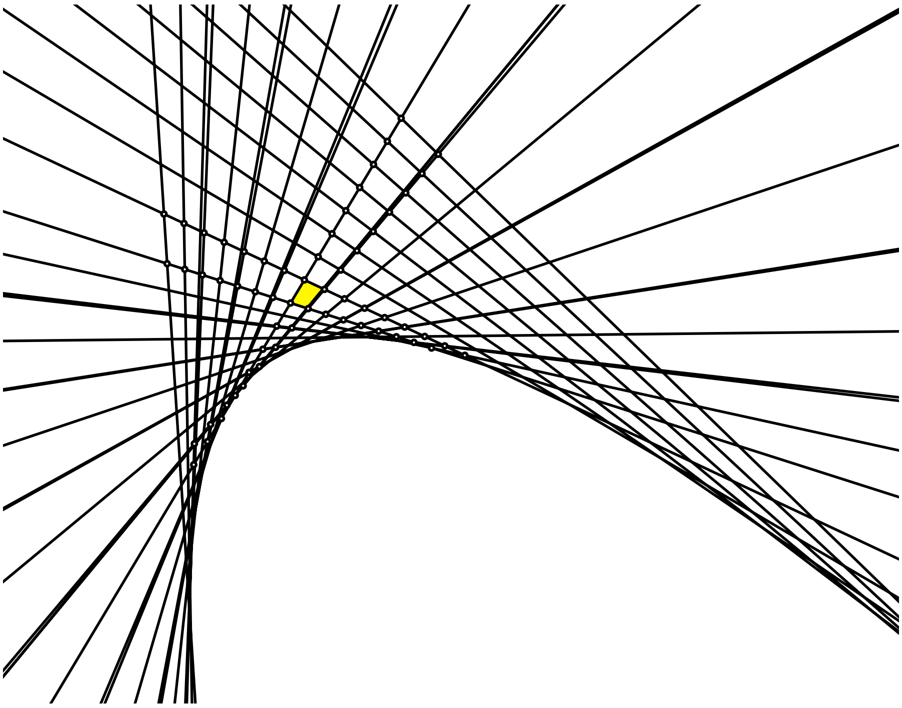

Abb. 8: Parabel

Ein Kegelschnitt ist durch fünf tangentiale Geraden festgelegt. In unserem Fall sind das die vier Viereckseiten und die unendlich ferne Gerade.