Hans Walser, [20170809a]

Dreikegelproblem

Anregung: H. Sch., W.

1 Problemstellung

Drei Kegel (drei gerade Kreis-Doppelkegel) haben die Spitze gemeinsam, den Öffnungswinkel gemeinsam und paarweise orthogonale Achsen (Abb. 1).

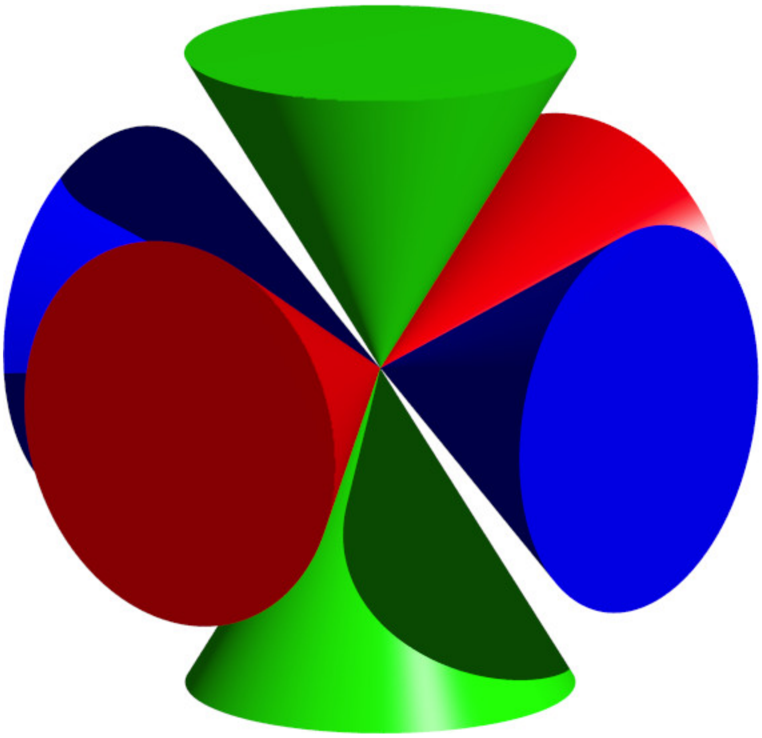

Abb. 1: Die drei Kegel

Fragen:

a) Ist es möglich, auf jedem der drei Kegel je eine Mantellinie auszuwählen, so dass die drei Mantellinien paarweise orthogonal sind?

b) Wie ist es in anderen Dimensionen?

2 Lösung im Raum

Wir zeichnen einen Doppelkegel, der die orthogonalen Achsen der drei gegebenen Kegel als Mantellinien enthält (gelb in Abb. 2). Es gibt vier Möglichkeiten dazu.

Dieser gelbe Kegel hat den halben Öffnungswinkel:

$$\alpha = \arctan\left(\sqrt{2}\right) \approx 54.7356° \tag{1}$$

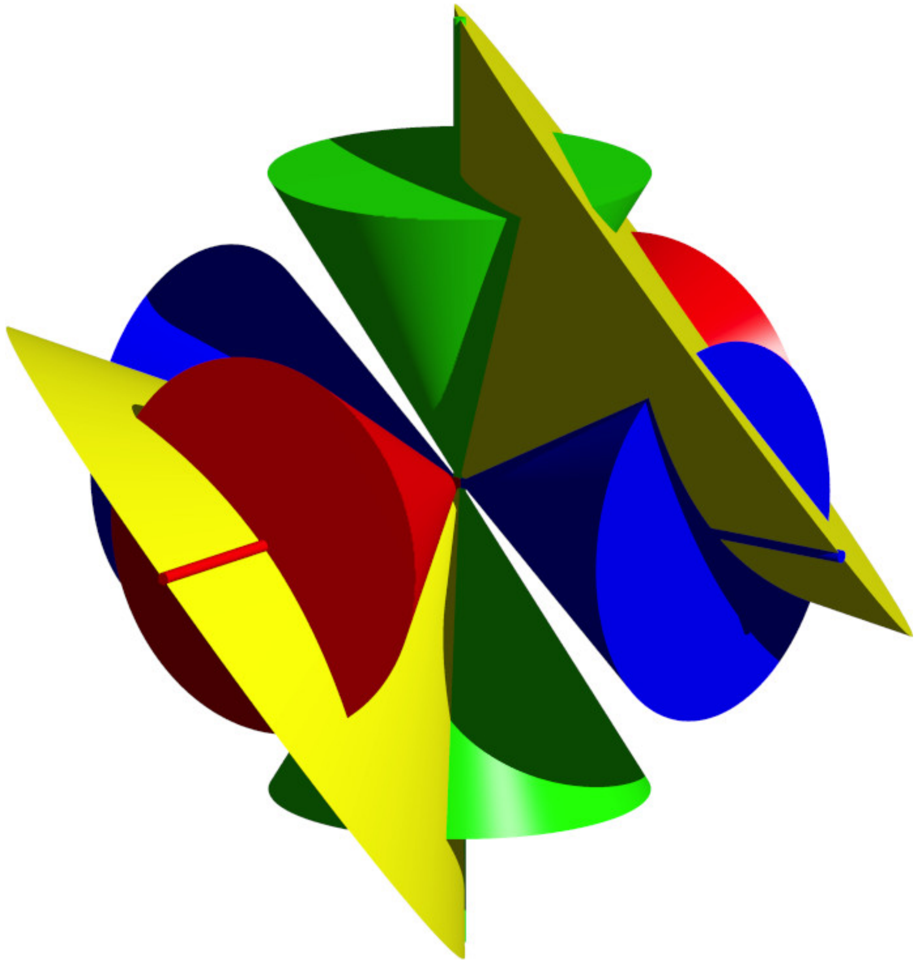

Abb. 2: Zusätzlicher Kegel

Dieser Kegel enthält Tripel paarweise orthogonaler Mantellinien.

Wir schneiden den gelben Kegel in zyklischer Reihenfolge mit den drei gegebenen Kegeln. In der Abbildung 3 ist ein Beispieltripel schwarz eingezeichnet. Dies ist eine Lösung.

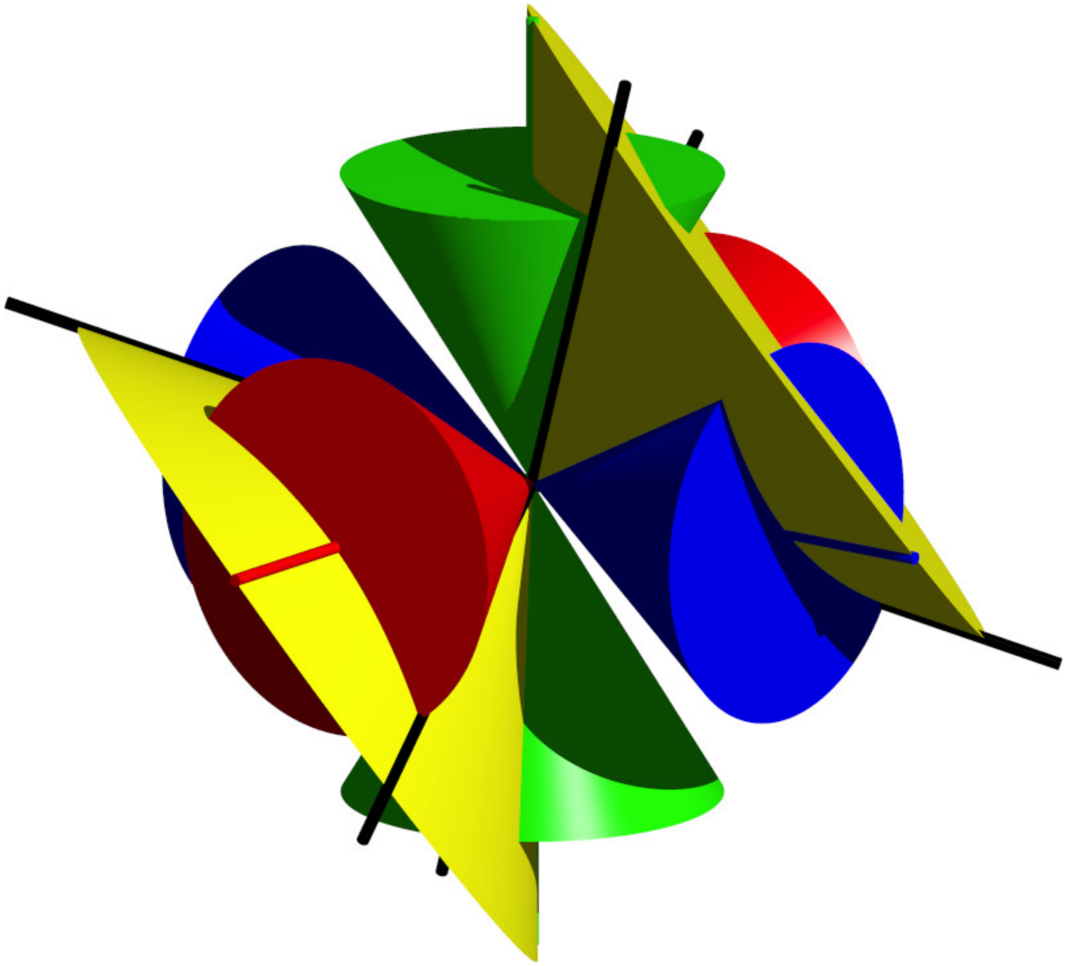

Abb. 3: Eine Lösung

Den Fall für ungerade Dimensionen > 3 habe ich nicht untersucht.

3 Gerade Dimension

Für die gerade Dimension $n = 2m$ wählen wir die n Koordinatenachsen als Kegelachsen, die Kegelspitzen im Ursprung und den halben Öffnungswinkel:

$$\alpha = \arctan(a) \tag{2}$$

Die n Kegel bestehen also aus den Ursprungsgeraden, die mit einer bestimmten Koordinatenachse den Winkel (2) einschließen.

Die n Punkte mit den Koordinaten

$$\begin{gathered}(1,a,0,0,\ldots,0,0),(-a,1,0,0,\ldots,0,0),\\(0,0,1,a,\ldots,0,0),(0,0,-a,1,\ldots,0,0),\\\ldots,\\(0,0,0,0,\ldots,1,a),(0,0,0,0,\ldots,-a,1)\end{gathered} \tag{3}$$

liegen je auf einem Kegel. Die Mantellinien vom Ursprung durch je einen der n Punkte (3) sind paarweise orthogonal. Wir haben also eine Lösung.

Diese einfache Lösung funktioniert bei ungeraden Dimensionen nicht.

4 Sonderfall im Raum

Im Raum gibt es für den halben Öffnungswinkel

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \approx 48.1897° \tag{4}$$

eine interessante Lösung (Abb. 4).

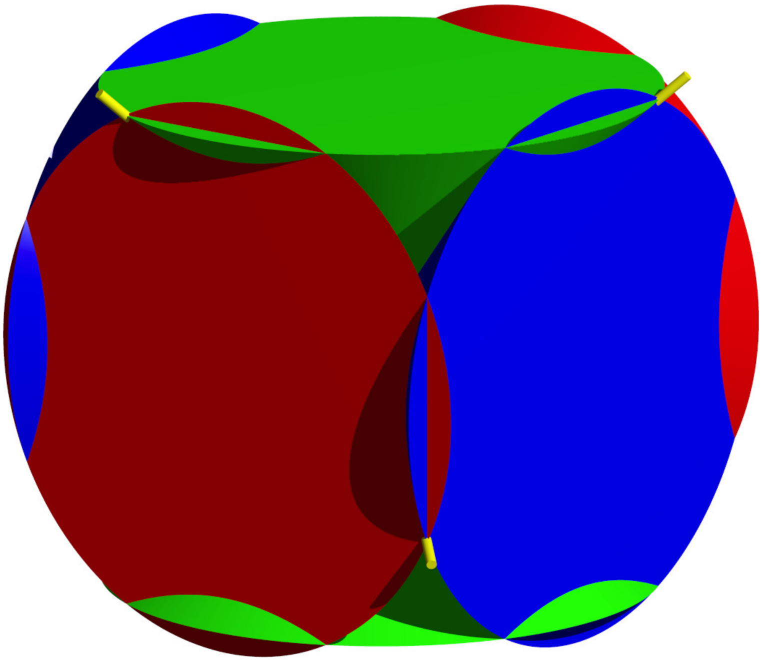

Abb. 4: Sonderfall im Raum

Die gesuchten Mantellinien sind die Schnittlinien je zweier Kegel. In der Abbildung 3 sind sie gelb eingezeichnet. Sie verlaufen durch den Ursprung und die Punkte:

$$\left(1,1,-\tfrac{1}{2}\right),\left(1,-\tfrac{1}{2},1\right),\left(-\tfrac{1}{2},1,1\right) \qquad (5)$$

Die Orthogonalität kann leicht nachgerechnet werden.