Hans Walser, [20190107]

Dreiecksraster

1 Worum geht es?

Figuren im Dreiecksraster, vgl. (Walser 2011, S. 46).

2 Reguläres Dreiecks-Punktraster

Die Abbildung 1 zeigt ein reguläres Dreiecks-Punktraster (Ausschnitt).

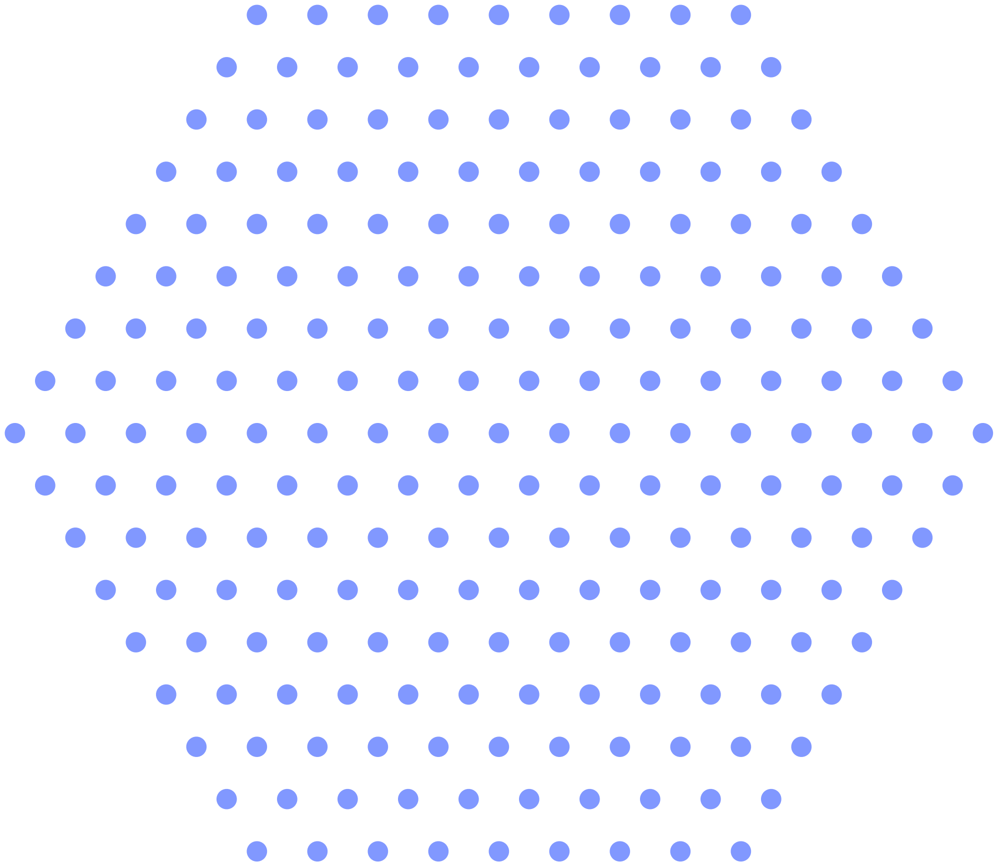

Abb. 1: Dreiecks-Punktraster

3 Ganzzahlige Dreiecke

Im Raster gibt es ganzzahlige Dreiecke. Das gelbe Dreieck der Abbildung 2 hat die Seiten

$$a = 3, b = 5, c = 7 \tag{1}$$

und den Winkel:

$$\gamma = 120° \tag{2}$$

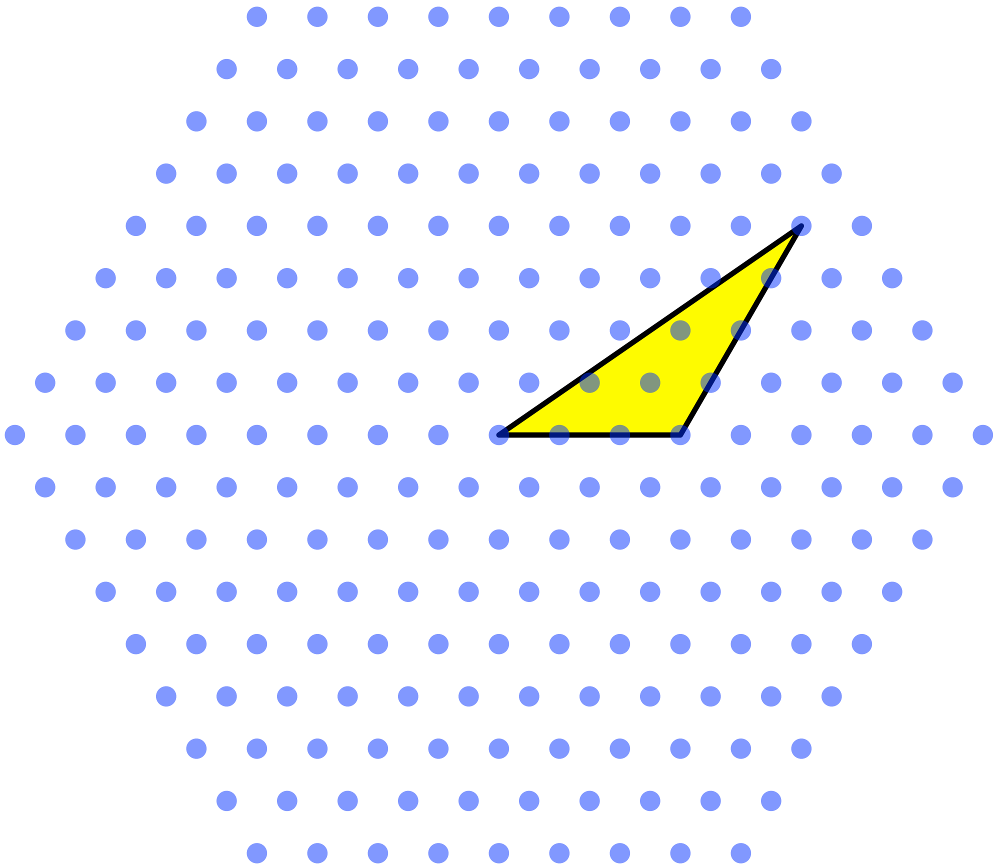

Abb. 2: Ganzzahliges Dreieck

Die Seitenlängen a und b sind unmittelbar einsichtig, ebenso der Winkel γ . Zur Berechnung von c benötigen wir den Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \tag{3}$$

In Beispiel des gelben Dreiecks heißt das:

$$c^2 = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \underbrace{\cos(120°)}_{-\frac{1}{2}} = 49 \tag{4}$$

Unser Beispiel ist eine Verallgemeinerung des Begriffs *pythagoreisches Dreieck*. Es gibt unendliche viele solche ganzzahlige Dreiecke im Dreiecksraster.

4 Überlagerung

Im Raster der Abbildung 3 ist eine Strecke der Länge 7 eingetragen.

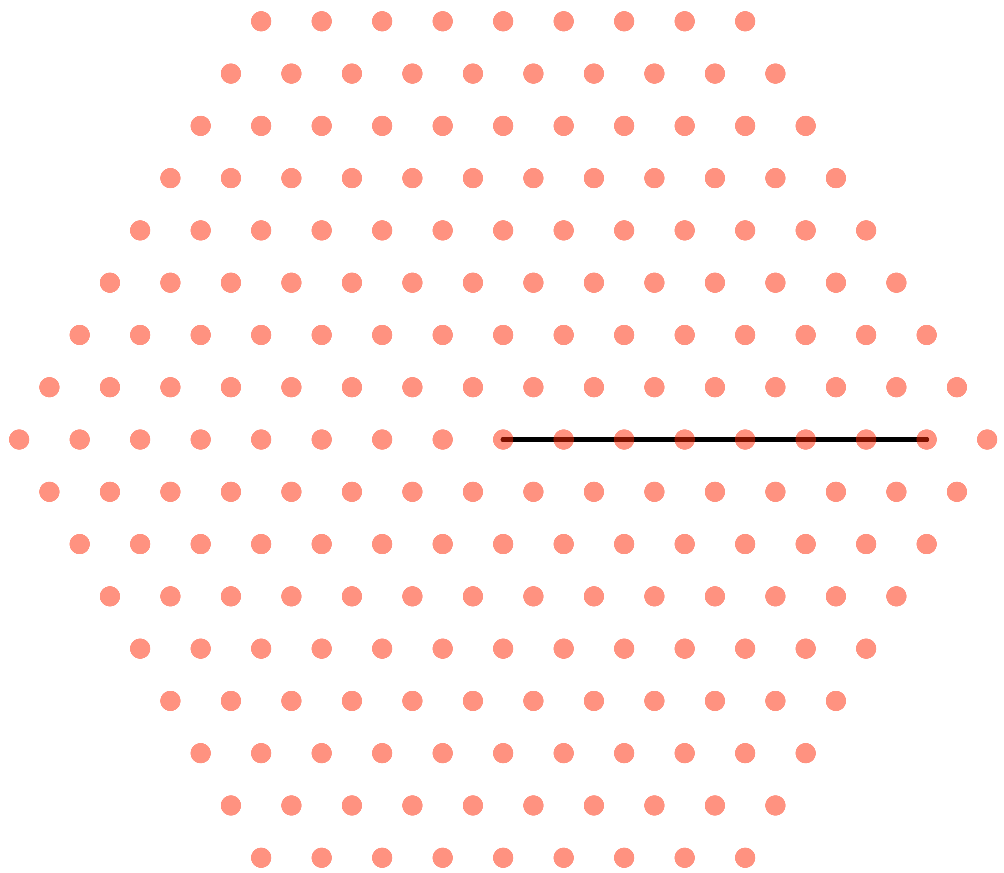

Abb. 3: Strecke der Länge 7

Wir drehen nun dieses Raster mitsamt der Strecke, bis diese mit der langen Seite des gelben Dreiecks der Abbildung 2 übereinstimmt. Der Drehwinkel ergibt sich aus dem Sinussatz:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{5}{7}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 38.213° \qquad (5)$$

Die Abbildung 4 zeigt die Situation. Die „Katheten“ *a* und *b* orientieren sich am blauen Punktraster, die „Hypotenuse“ *c* orientiert sich am roten Punktraster.

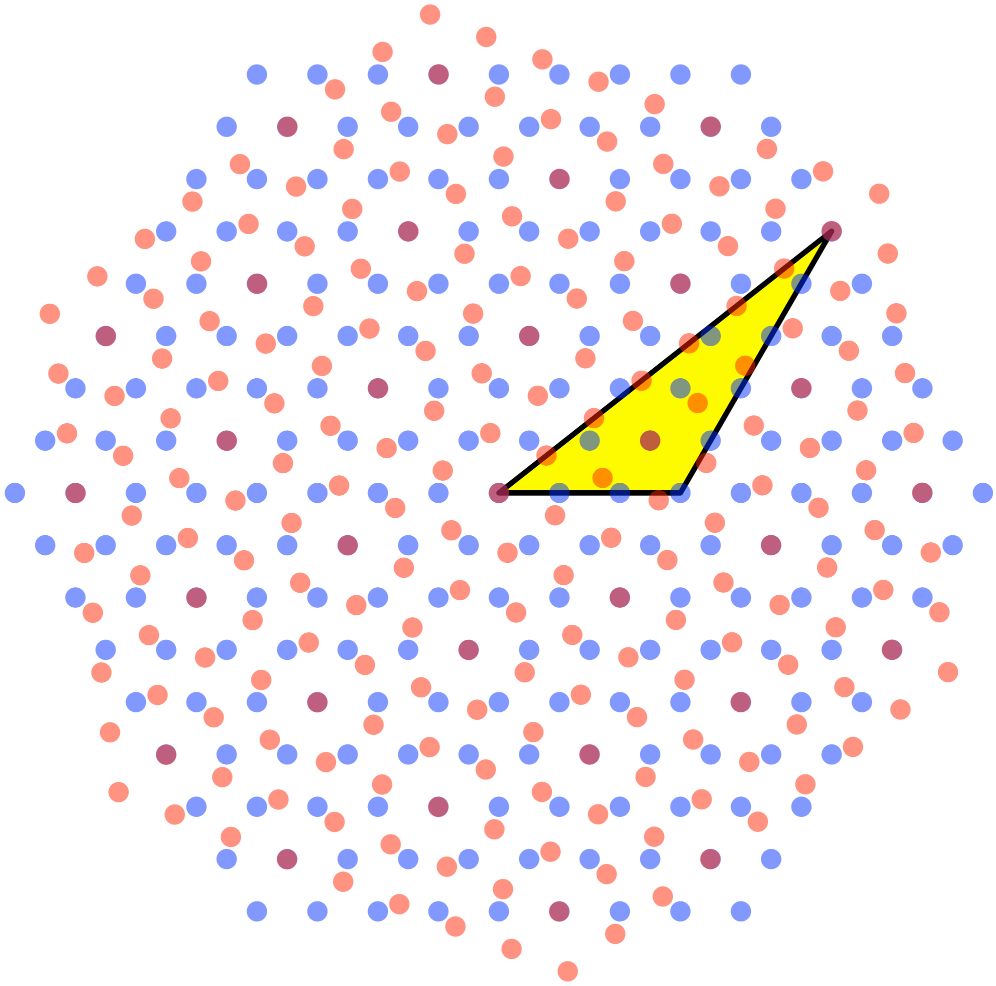

Abb. 4: Überlagerung mit Dreieck

Die Abbildung 5 zeigt die beiden Raster ohne das konstituierende Dreieck. Es gibt Punkte (die violetten), welche zu beiden Rastern gehören. Diese violetten Punkte bilden ihrerseits ein reguläres Dreiecksraster. Es hat die Maschenweite $\sqrt{7} \approx 2.646$. Diese violetten Punkte sind die Zentren der „Blümchen“ mit blauen und roten Blütenblättern. Einer dieser violetten Punkte ist der Inkreismittelpunkt des gelben Dreiecks der Abbildung 4.

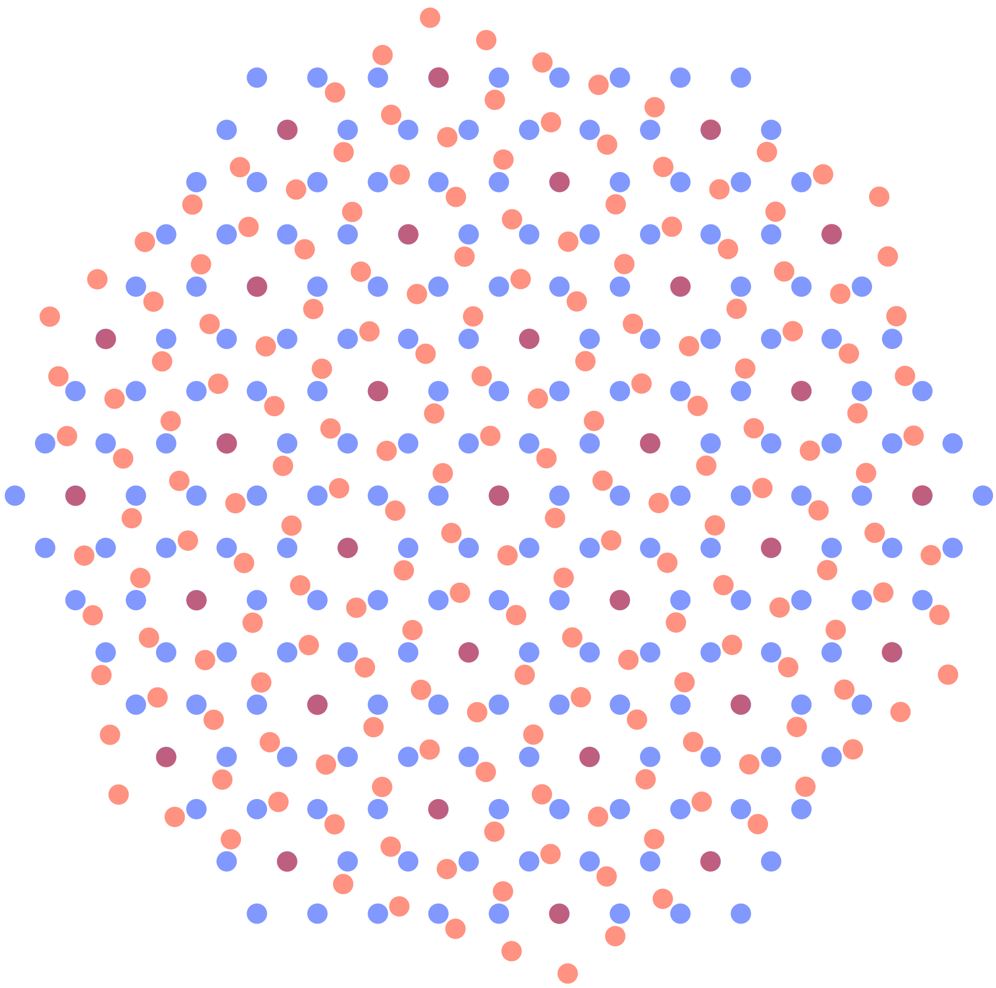

Abb. 5: Überlagerung

5 Iteration

Die Abbildung 6 zeigt eine Figur analog zur Abbildung 5, aber in den Farben orange und zyan. In grün erscheint der Überlagerungsraster.

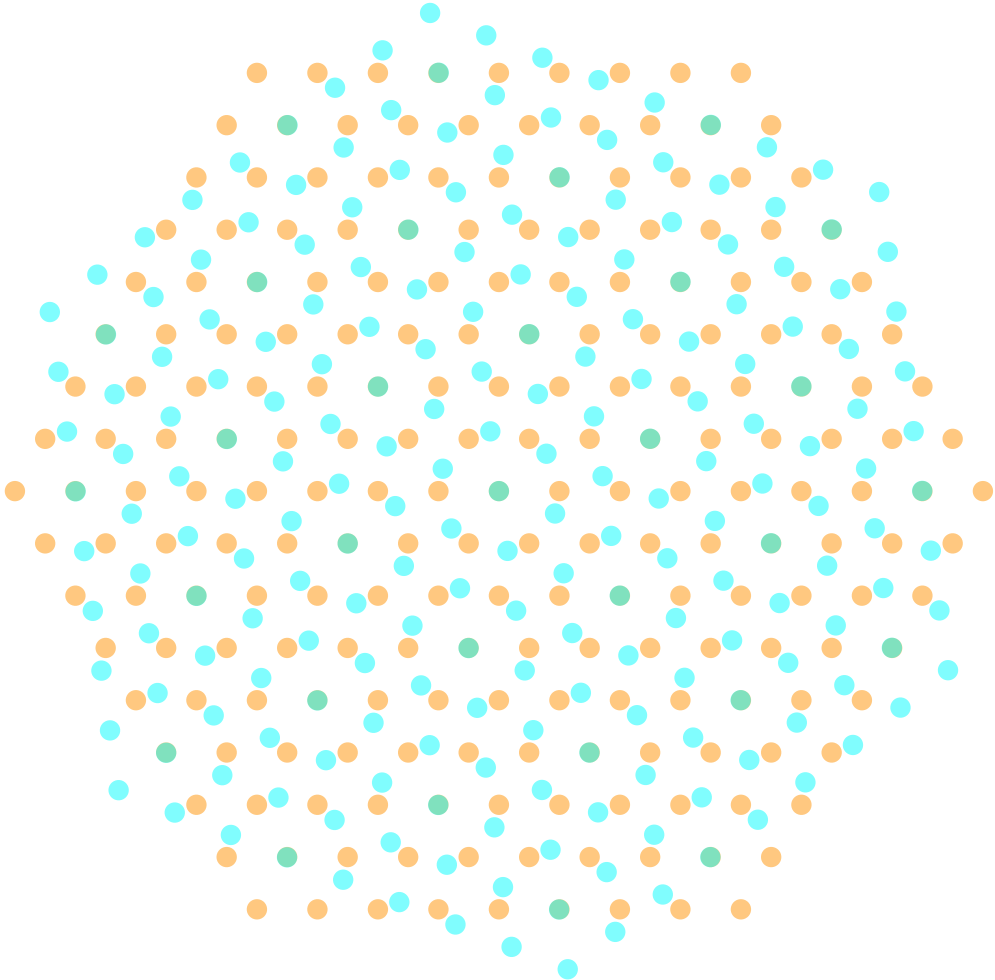

Abb. 6: Dasselbe in grün

Nun überlagern wir das violette Raster und das grüne Raster, nehmen aber die ursprünglichen Raster (blau, rot, orange und zyan) mit. Es entsteht die Figur der Abbildung 7. Das rote und das orange Raster kommen vollständig zur Deckung.

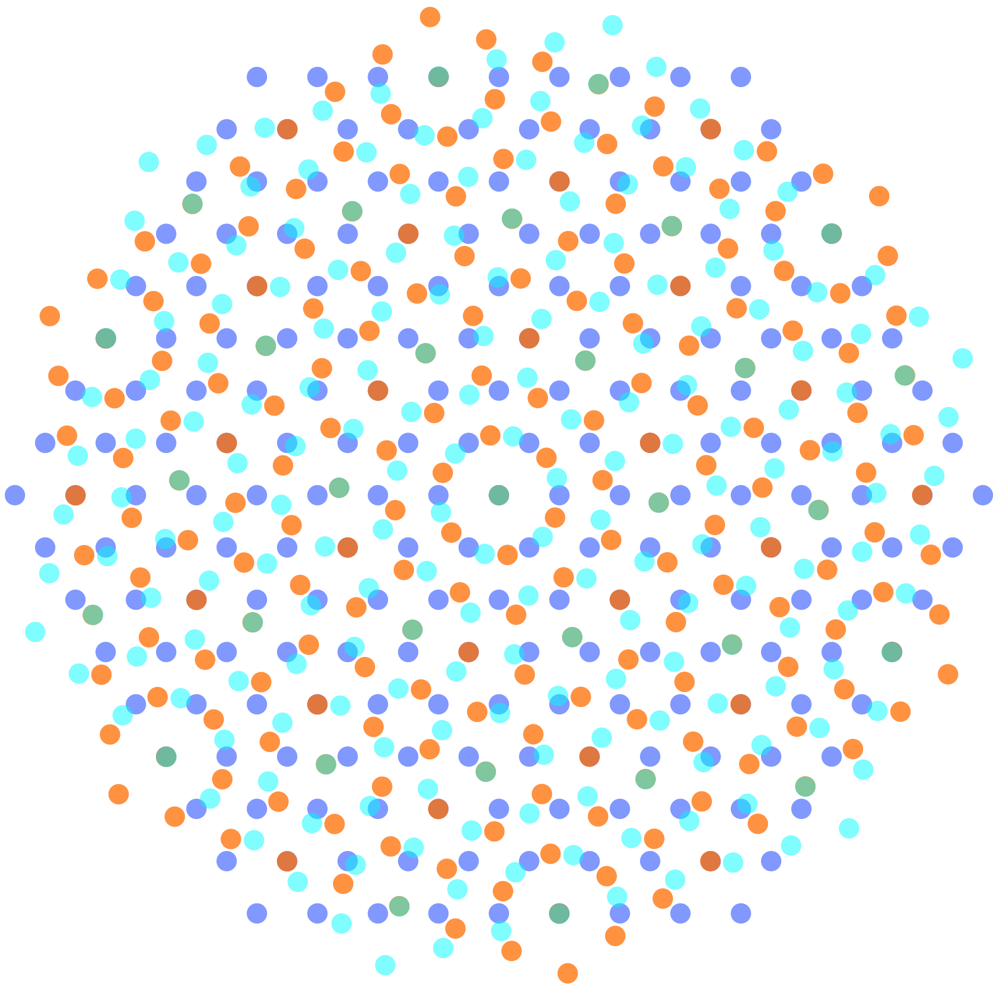

Abb. 7: Überlagerung der Überlagerungen

Es wird ein weiteres Dreiecksraster sichtbar (dunkelgrün), nun mit der Maschenweite 7. Dies kann im rot-orangen Raster nachgezählt werden.

6 Kreise

In der Abbildung 8 sind die Blütenblätter der Blümchen der Abbildung 5 in Kreise eingebettet. Diese Kreise bilden ein Dreiecksraster. Die Maschenweite des Rasters ist das $\sqrt{7}$ – fache der Kreisradien.

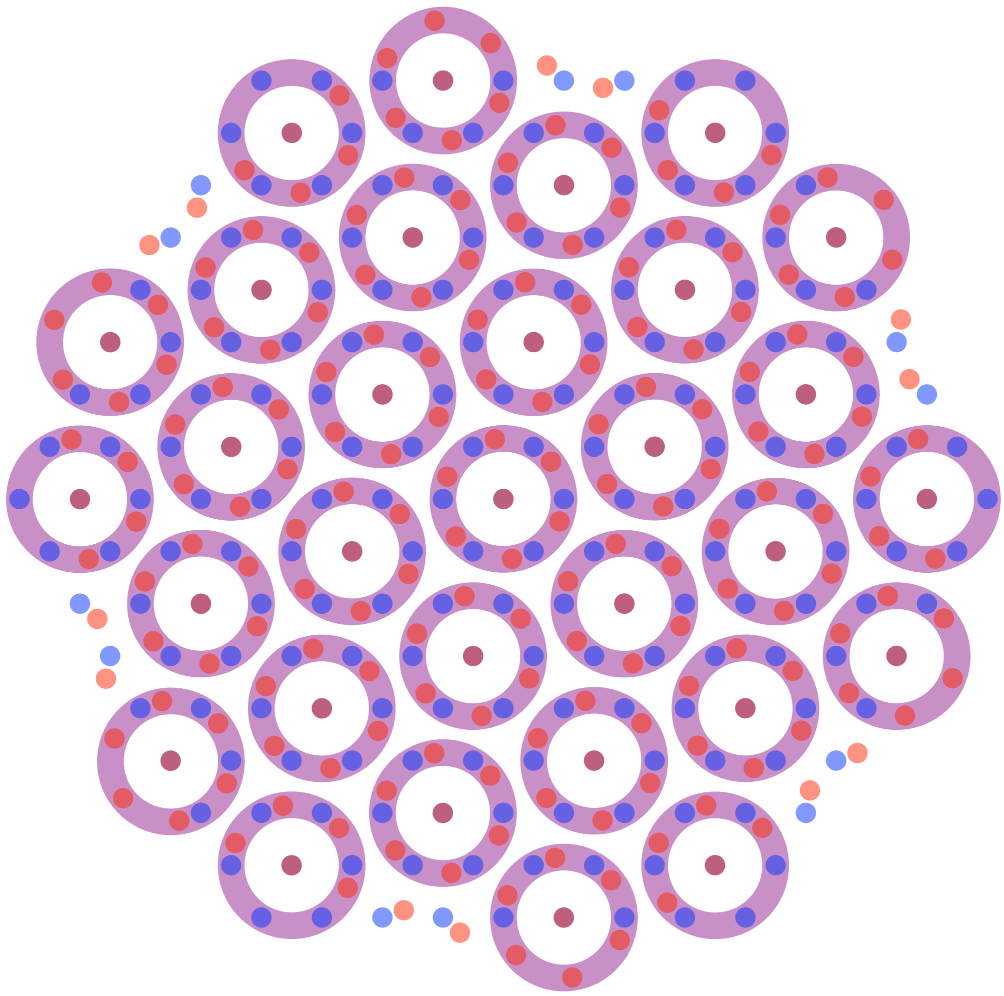

Abb. 8: Kreise durch die Blütenblätter

Die Abbildung 9 zeigt nur noch die Kreise.

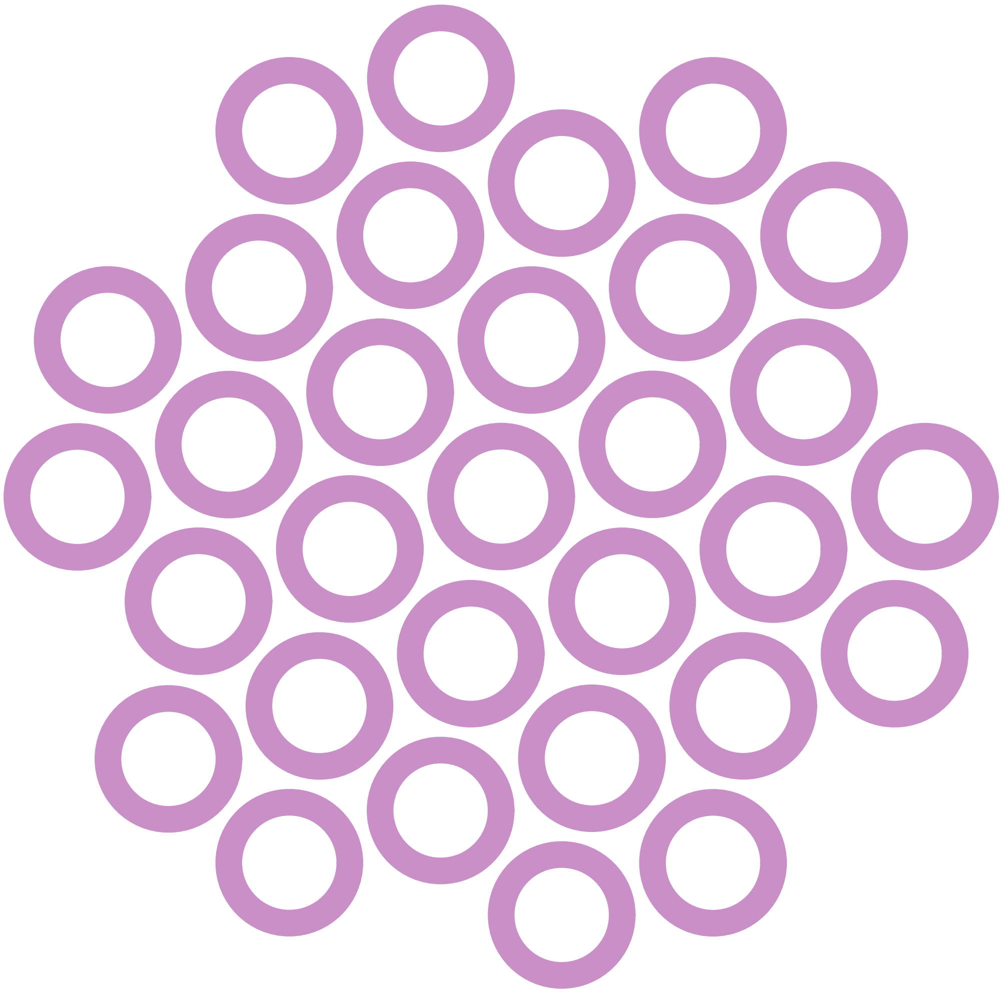

Abb. 9: Nur Kreise

In der Abbildung 10 wird ein zweiter entsprechender Kreisraster gemäß dem Verfahren der Abbildung 7 überlagert.

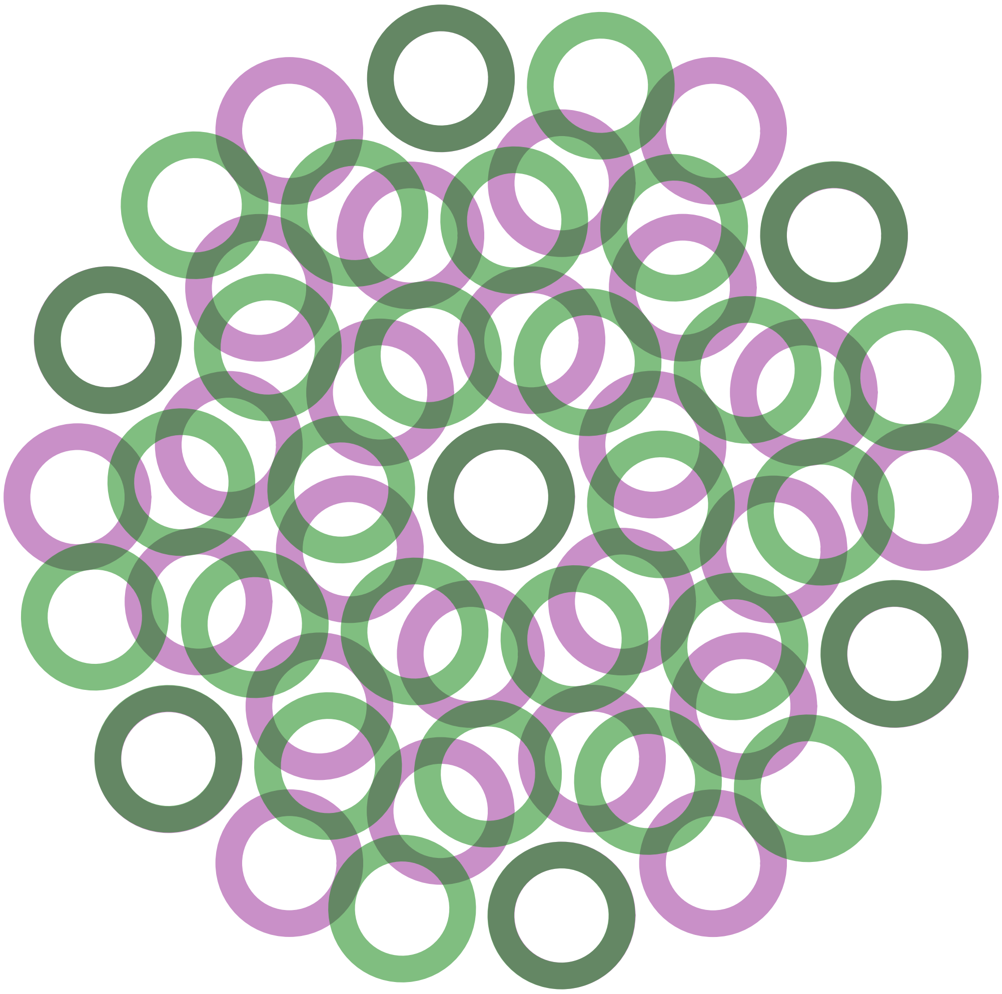

Abb. 10: Überlagerung

Es entsteht wie erwartet ein neuer Dreiecksraster. Die übrigen Dreiecke schneiden oder berühren sich.

In der Abbildung 11 wird das Berühren schärfer dargestellt.

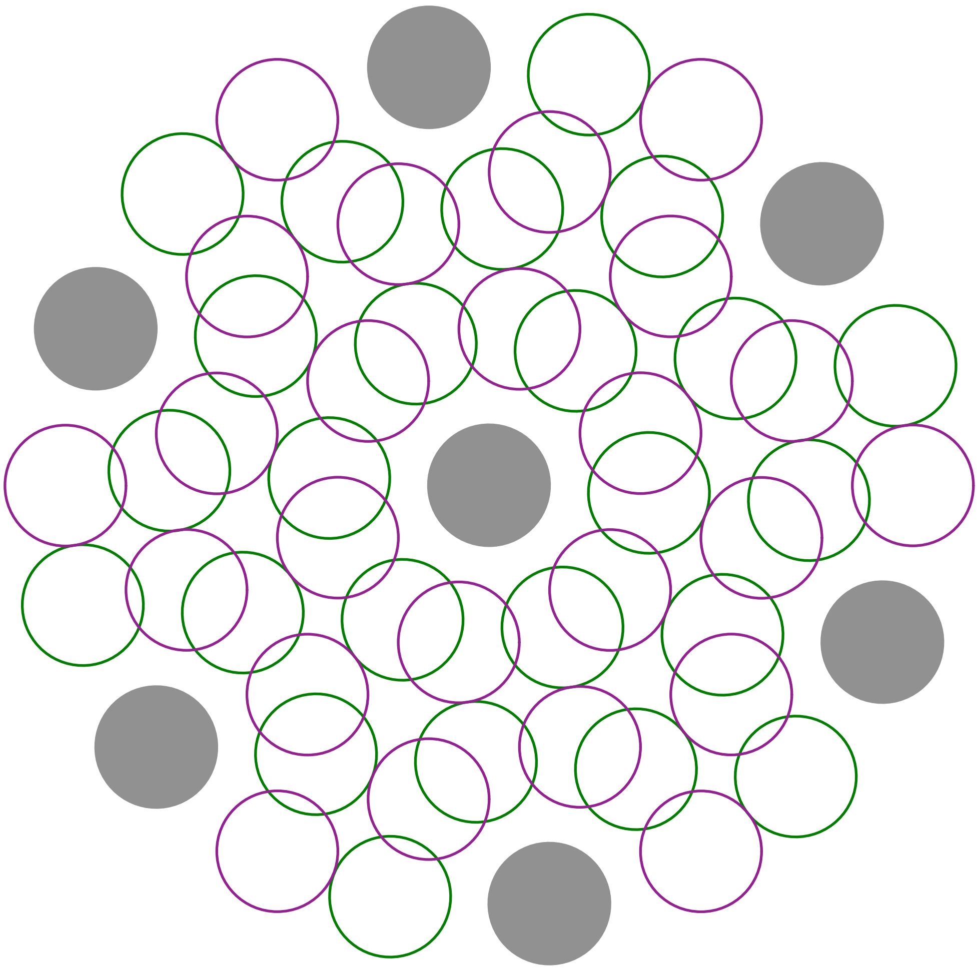

Abb. 11: Berührende Kreise

7 Ausblick

Analoge Spielereien können natürlich auch mit gewöhnlichen pythagoreischen Dreiecken im Quadratraster gemacht werden (Walser 2011, S. 43)

Literatur

Walser, Hans (2011): Geometrische Miniaturen. Figuren – Muster – Symmetrien. Leipzig. EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-42-4.