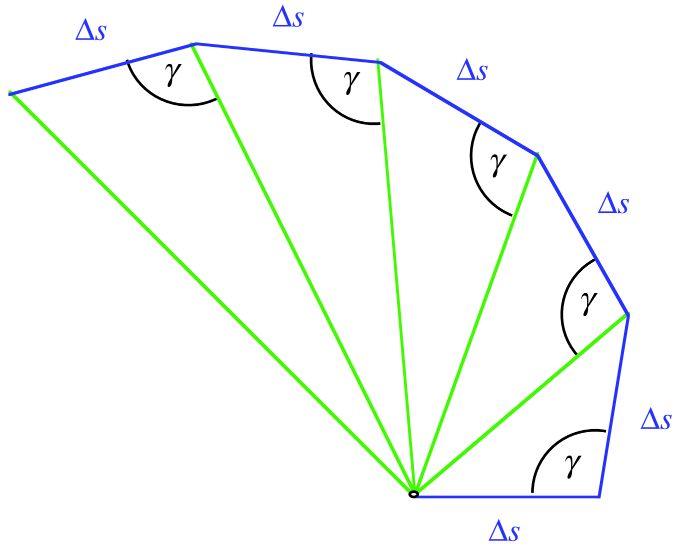
Hans Walser, [20080507a]

Dreiecksketten

1 Worum es geht

Wir zeichnen eine Kette von Dreiecken gemäß Figur. In der Figur ist $\gamma = 100°$. Es entsteht ein gleichseitiger Polygonzug. Wie lässt sich das Verhalten dieses Polygonszuges beschreiben?



Was für eine Kurve entsteht?

Der Verhalten des Polygonszuges hängt wesentlich vom Winkel γ ab. Für spitze Winkel γ ergibt sich eine (regelmäßige) Grenzfigur, für einen rechten Winkel γ erhalten wir eine archimedische Spirale und für stumpfe Winkel γ eine logarithmische Spirale.

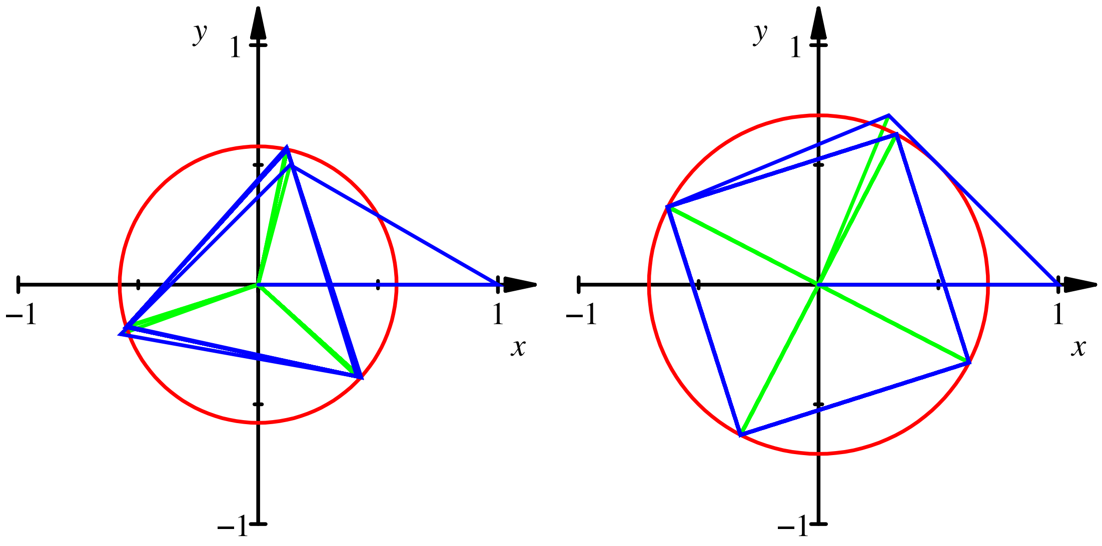
2 Fallunterscheidung

2.1 Spitze Winkel

Für spitze Winkel γ tendiert der Polygonzug gegen ein gleichseitiges Sehnenvieleck mit Zentriwinkeln $(180° - 2\gamma)$. Falls $(180° - 2\gamma)$ eine Teiler von 360° ist, ergibt sich ein regelmäßiges Polygon mit Innenwinkel 2γ als Grenzfigur. Wenn $(180° - 2\gamma)$ in einem rationalen Verhältnis zu 360° steht, aber kein Teiler von 360° ist, erhalten wir als Grenzfigur einen Stern, der sich aus Diagonalen gleicher Länge eines regelmäßigen Vieleckes zusammensetzt. An den Sternspitzen haben wir ebenfalls Innenwinkel 2γ. Bei irrationalem Verhältnis zu 360° ergibt sich ein überall dicht belegter Kreisring.

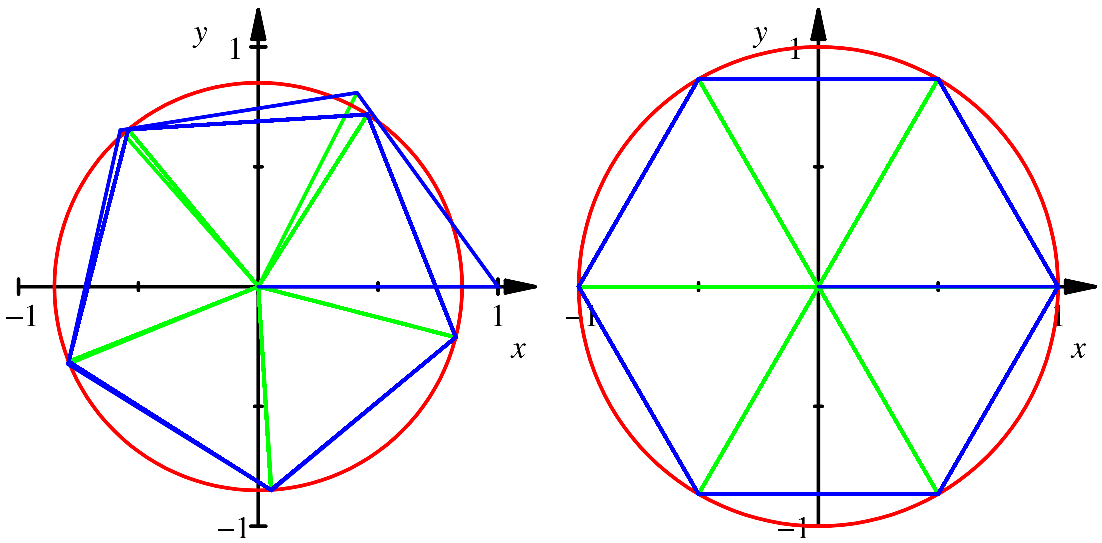
Im Folgenden einige Beispiele mit jeweils $\Delta s = 1$.

Für $\gamma = 30°$ oder $\gamma = 45°$ ergeben sich als Grenzfigur ein regelmäßiges Dreieck beziehungsweise ein Quadrat.



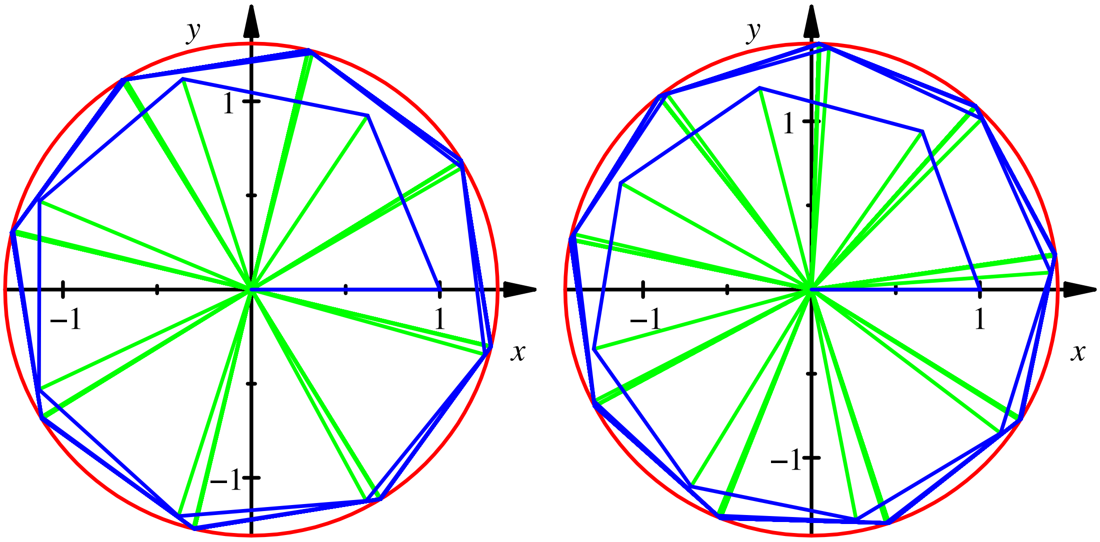
Dreieck und Quadrat

Für $\gamma = 54°$ erhalten wir als Grenzfigur ein regelmäßiges Fünfeck, für $\gamma = 60°$ auf Anhieb das regelmäßige Sechseck.



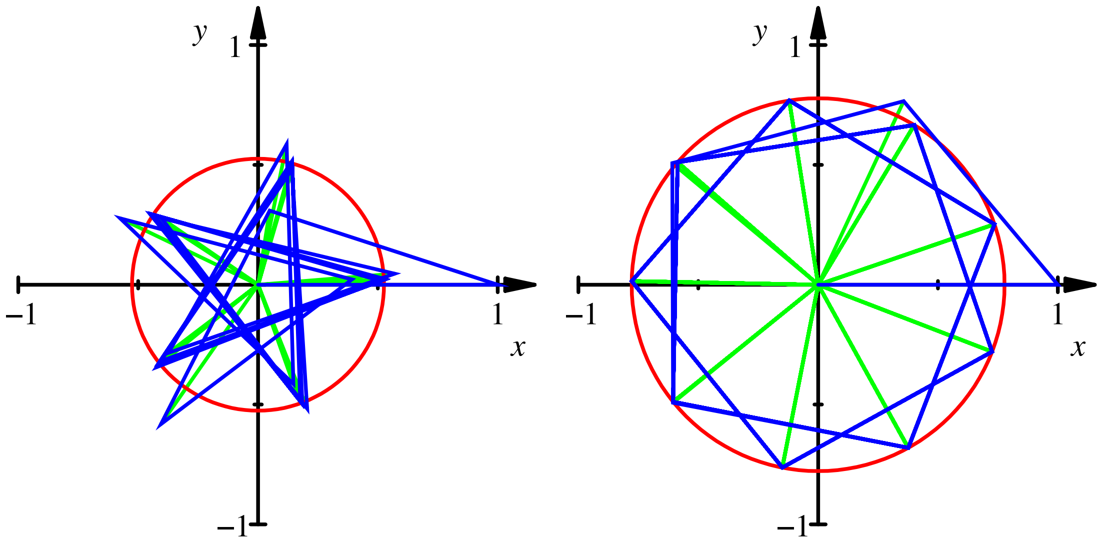
Fünfeck und Sechseck

Für $\gamma = 67.5°$ und $\gamma = 70°$ ergeben sich Achteck und Neuneck.



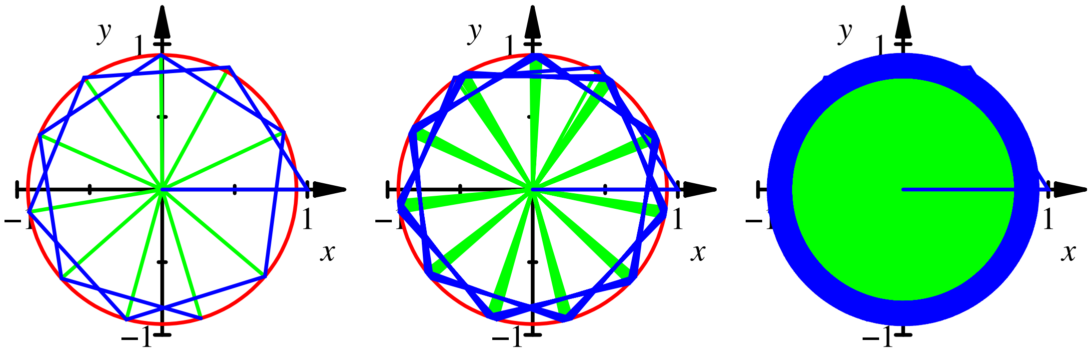
Achteck und Neuneck

Für $\gamma = 18°$ ist $\frac{360°}{180°-2\gamma} = \frac{5}{2}$; wir erhalten als Grenzfigur ein Pentagramm, das aus einem regelmäßigen Fünfeck durch Überspringen jeder zweiten Ecke entsteht. Für $\gamma = 50°$ ist $\frac{360°}{180°-2\gamma} = \frac{9}{2}$; wir erhalten eine Grenzfigur, welche aus einem regelmäßigen Neuneck durch Überspringen jeder zweiten Ecke entsteht.



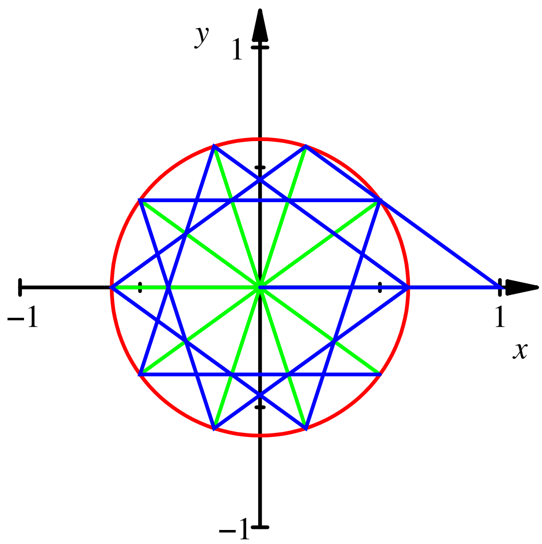
Sternfiguren

Wir wählen nun $\gamma = 1$ im Bogenmaß, also $\gamma = 1 = \frac{1}{2\pi}360° \approx 57.29577951308°$. Dieser Winkel steht nicht in einem rationalen Verhältnis zu 360°. In der folgenden Abbildung sind der Reihe nach 10, 100 und 1000 Dreiecke gezeichnet.



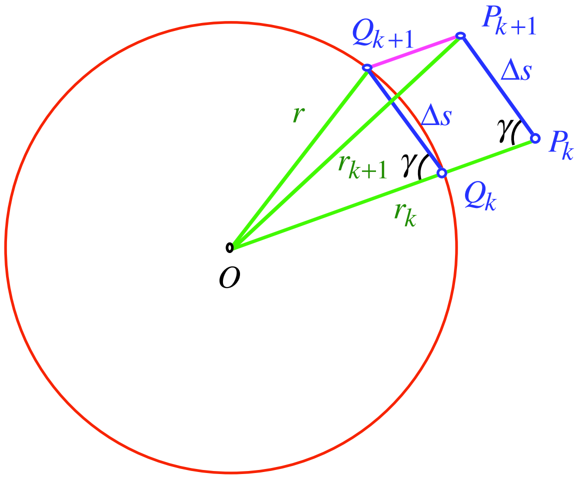
Irrationales Verhältnis

Beweisskizze: Falls einer der grünen Radien die Länge $r = \frac{\Delta s}{2\cos(\gamma)}$ hätte, dann auch alle folgenden Radien. Wir hätten eine Folge von gleichschenkligen Dreiecken mit der Basis Δs und den Basiswinkeln γ. Dies wäre der stabile Fall. Dieser stabile Fall tritt exakt ein für $\gamma = 60°$ oder für $\gamma = 36°$. (Gibt es weitere stabile Fälle?)



Stabiler Fall für $\gamma = 36°$

Wenn nun zum Beispiel $r_k > r = \frac{\Delta s}{2\cos(\gamma)}$ ist, dann haben wir im Vergleich zum stabilen Fall die Situation der Skizze:



Vergleich mit stabilem Fall

Auf Grund der Dreiecksungleichung ist

$$r_{k+1} < r + \overline{Q_{k+1}P_{k+1}} = r + \overline{Q_kP_k} = r_k$$

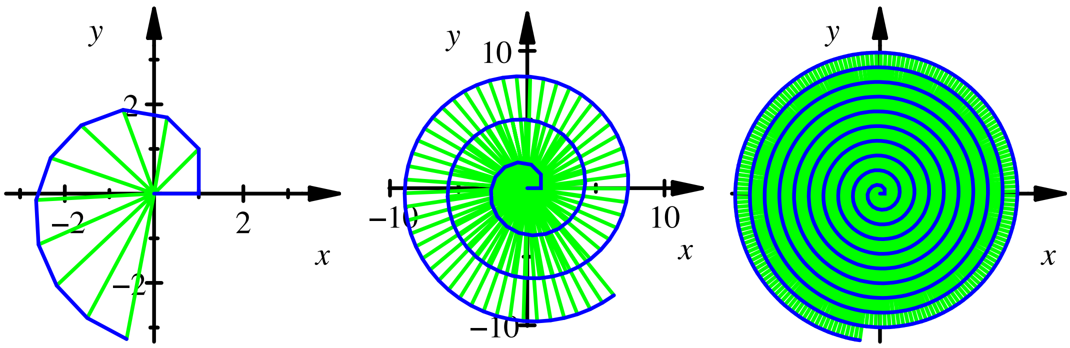
Die folge der Radien ist monoton fallend. Es ist sogar $r_{k+1} - r \approx (r_k - r)\cos(180° - 2\gamma)$.

Für $r_k < r = \frac{\Delta s}{2\cos(\gamma)}$ erhalten wir entsprechend eine monoton wachsende Folge von Radien.

Somit ist $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = r = \frac{\Delta s}{2\cos(\gamma)}$; die Figur strebt gegen den stabilen Fall.

2.2 Rechter Winkel

Für $\gamma = 90°$ entsteht eine Figur mit aufgesetzten rechtwinkligen Dreiecken. Bei $\Delta s = 1$ erhalten wir für die Radien die Werte $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \ldots$. Der Polygonzug tendiert gegen eine *archimedische Spirale* (vgl. [Walser 2004]).

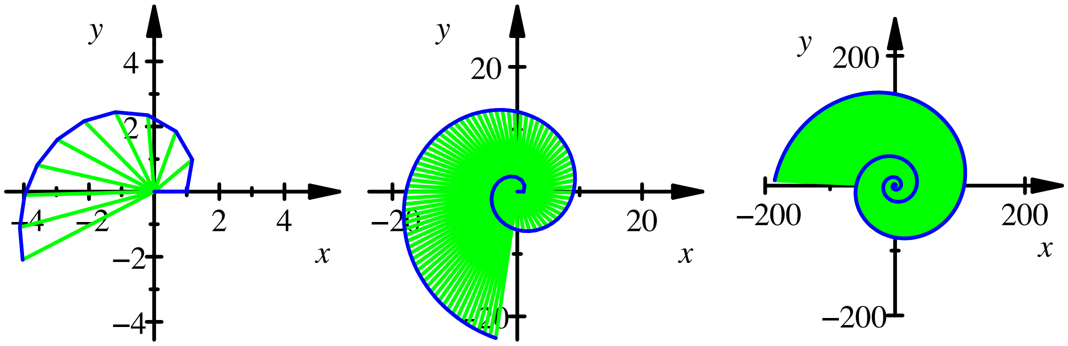


Archimedische Spirale

2.3 Stumpfer Winkel γ

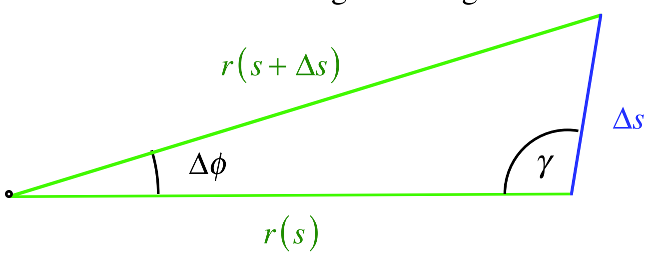
Für $90° < \gamma < 180°$ erhalten wir einen Polygonzug, der eine *logarithmische Spirale* als Grenzkurve hat. Dies ist nicht trivial, da die Dreiecke ja nicht ähnlich sind; wir haben keine Schneckenhaus-Situation.

Die Figurenfolge zeigt die Situation für $\gamma = 100°$ und $\Delta s = 1$; es sind 10, 100 und 1000 Dreiecke gezeichnet.



Logarithmische Spirale

Zum Beweis verwenden wir die Bezeichnungen der Figur:



Bezeichnungen

Da Δs konstant ist, wächst der Radius r nach außen, und der Winkel $\Delta\phi$ geht gegen null. „Weit außen" sind also die Radien nahezu parallel, und es gilt:

$$\Delta r = r(s+\Delta s) - r(s) \approx -\cos(\gamma)\Delta s$$

$$\Delta\phi \approx \frac{\sin(\gamma)\Delta s}{r}$$

Daraus erhalten wir:

$$\Delta\phi \approx -\tan(\gamma)\tfrac{\Delta r}{r}$$

Wir arbeiten nun differenziell weiter:

$$\mathrm{d}\phi = -\tan(\gamma)\tfrac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$\phi = \int \mathrm{d}\phi = -\tan(\gamma)\int \tfrac{\mathrm{d}r}{r} = -\tan(\gamma)\big(\ln(r)+C\big)$$

$$\ln(r) = \frac{\phi}{-\tan(\gamma)} - C$$

$$r(\phi) = \mathrm{e}^{\frac{\phi}{-\tan(\gamma)} - C}$$

Dies ist die Polargleichung einer logarithmischen Spirale.

Literatur

[Walser 2004] Walser, Hans: Pythagoras, eine archimedische Spirale und eine Approximation von π. *Praxis der Mathematik* (6/46), 2004, S. 287-288