Hans Walser, [20131028]

Dreieckshöhe

Wir berechnen die Höhen eines Dreiecks, dessen drei Seiten a, b, c gegeben sind.

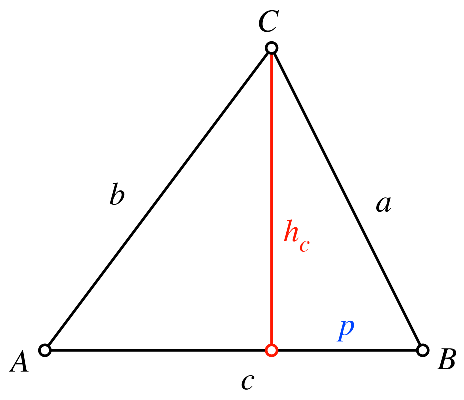

Abb. 1: Dreieckshöhe

Mit Pythagoras erhalten wir:

$$h_c^2 = a^2 - p^2$$
$$h_c^2 = b^2 - (c-p)^2$$

Gleichsetzen liefert:

$$p = \tfrac{a^2-b^2+c^2}{2c}$$

Damit erhalten wir:

$$h_c^2 = a^2 - p^2 = a^2 - \left(\tfrac{a^2-b^2+c^2}{2c}\right)^2 = \tfrac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4c^4}$$

Der Zähler ist zyklisch symmetrisch in a, b, c. Durch zyklische Vertauschung ergibt sich:

$$h_a^2 = \tfrac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4a^4}$$
$$h_b^2 = \tfrac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4b^4}$$
$$h_c^2 = \tfrac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4c^4}$$

Weiter finden wir einen Link zur Dreiecksfläche $A_{\Delta ABC}$:

$$A_{\Delta ABC} = \tfrac{ch_c}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

Mit der üblichen Schreibweise $s = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$ ergibt sich die Heronsche Formel:

$$A_{\Delta ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$