Hans Walser, [20190302]

# Dreiecksaufwicklung

## 1 Worum geht es?

Spiel mit einem Gelenkmodell. Führt zu einer einfach berechenbaren Situation, die aber mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist.

## 2 Das Gelenkmodell

Wir denken uns ein Gelenkmodell mit drei gleich langen Stäben und jeweils gleichen Gelenkwinkeln (Abb. 1). Wir arbeiten dabei mit den Außenwinkeln.

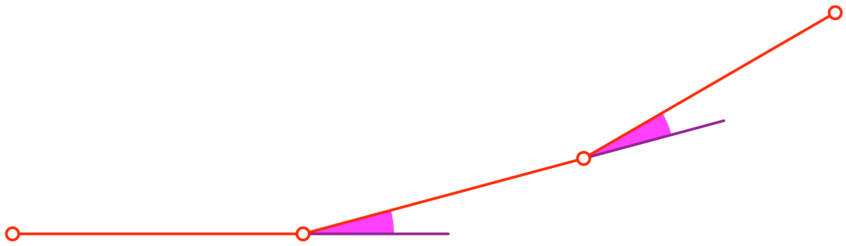

**Abb. 1: Gelenkmodell**

## 3 Aufwickeln zum Dreieck

Wir legen den ersten Stab horizontal hin und vergrößern den Außenwinkel, bei 0° beginnend, bis sich das Gelenkmodell zum gleichseitigen Dreieck schließt. Dies ist beim Außenwinkel 120° der Fall (Abb. 2).

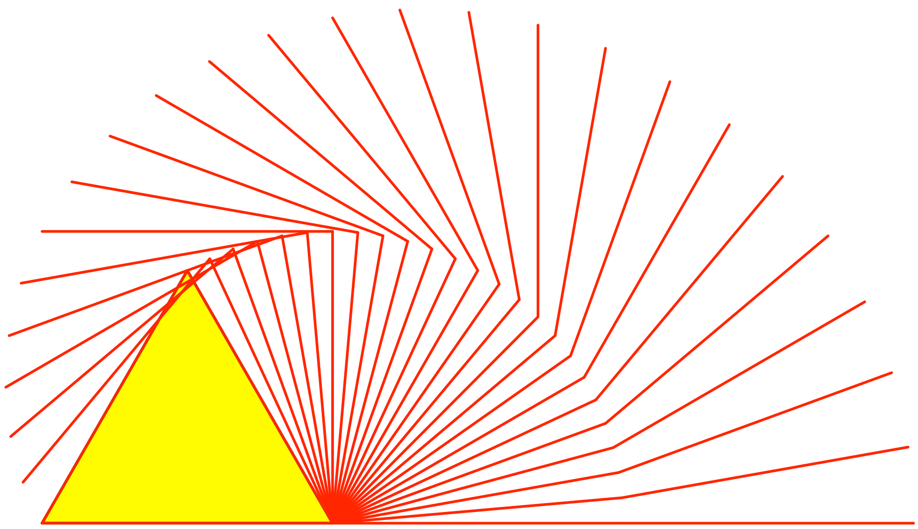

**Abb. 2: Schließen zum gleichseitigen Dreieck**

## 4 Bahnkurven der Gelenke

Der Startpunkt und das erste Gelenk bleiben fest. Das zweite Gelenk bewegt sich auf einem Kreis (blau in Abb. 3). Der Endpunkt bewegt sich auf einer Kurve, die aus einer Überlagerung zweiter Kreisbewegungen besteht (grün in Abb. 3). Die Bahnkurven sind für einen Parameterbereich (Außenwinkel) von –180° bis 180° gezeichnet.

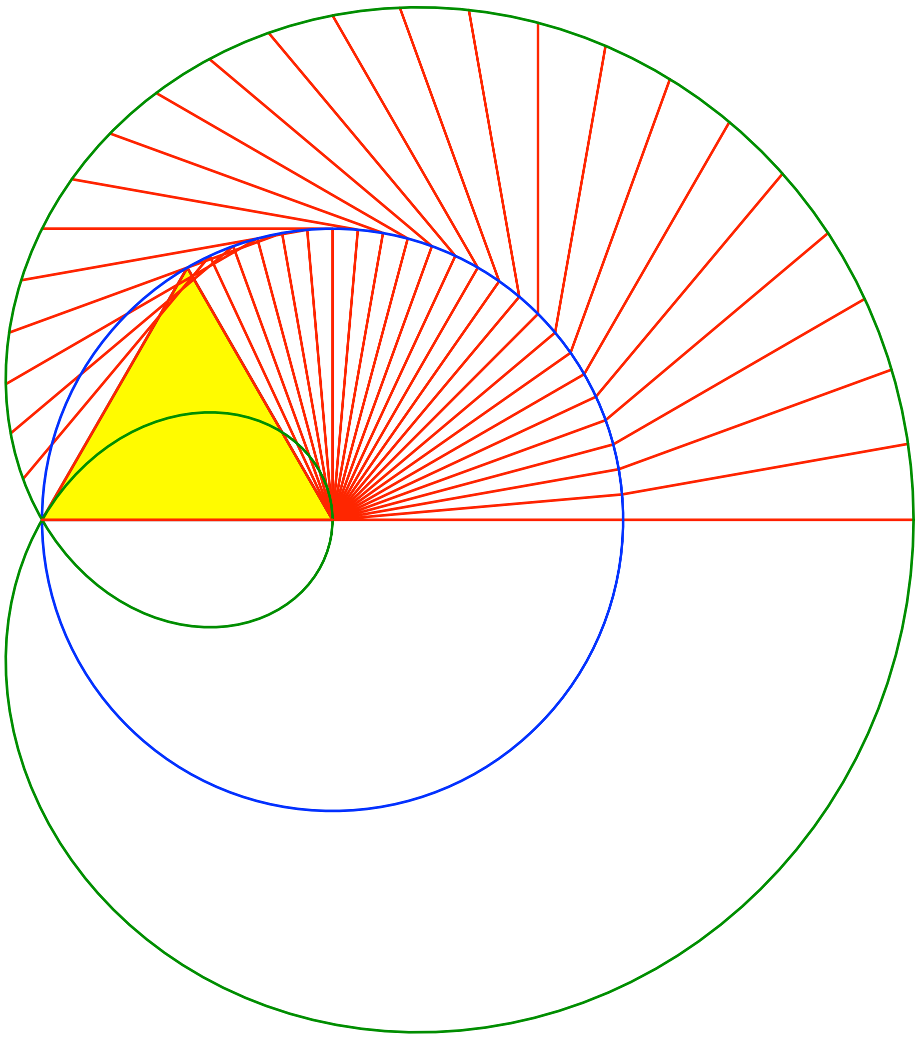

**Abb. 3: Bahnkurven**

## 5 Kollision an der Spitze

Wir sehen, dass der dritte Stab des Gelenkmodells bei der Bewegung zeitweise die Spitze des Dreiecks abschneidet.

In welcher Position touchiert der dritte Stab die Dreiecksspitze (Abb. 4a)? Wir suchen den zugehörigen Außenwinkel $t$.

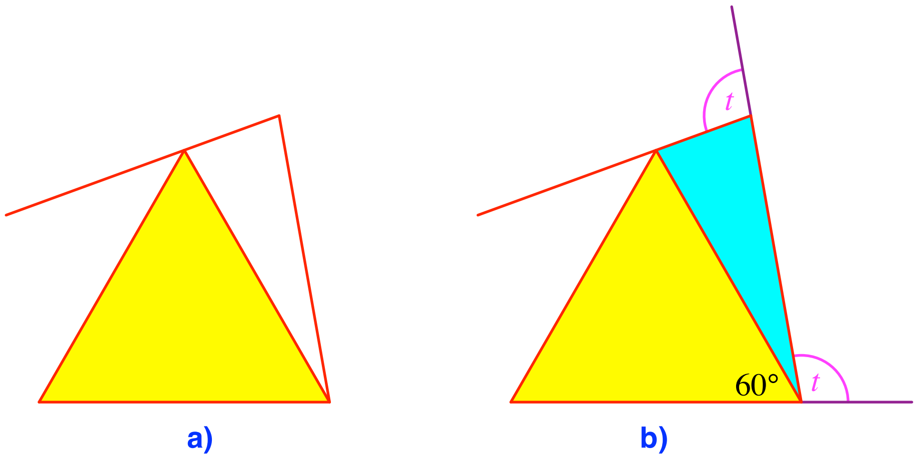


**Abb. 4: Kollision an der Spitze**

Das in der Abbildung 4b hellblau eingezeichnete Dreieck ist gleichschenklig. Sein Basiswinkel ist 180° – $t$, sein Spitzenwinkel 180° – 60° – $t$. Aus der Winkelsumme 180° erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2\left(180° - t\right) + \left(180° - 60° - t\right) &= 180° \\ t &= 100° \end{aligned} \tag{1}$$

Eine ganz einfache Rechnung mit einem schönen Resultat. Nur: ein Winkel von 100° ist *nicht* mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Wenn wir einen Winkel von 100° mit Zirkel und Lineal konstruieren könnten, können wir zunächst einen Winkel von 60° subtrahieren (mit Zirkel und Lineal machbar) und hätten einen Winkel von 40°. Dies ist der Zentriwinkel des regelmäßigen Neunecks, das wir somit mit Zirkel und Lineal konstruieren könnten. Das widerspricht aber einem Satz von Gauß über die Konstruierbarkeit regelmäßiger Vielecke.

Wir können also die Situation der Abbildung 4a nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren.

Bei einem rechnerischen Zugang zu diesem Problem treffen wir auf kubische Gleichungen.

## 6 Quadrat und regelmäßiges Fünfeck

Die Abbildung 5 zeigt die entsprechende Figur für das Quadrat.

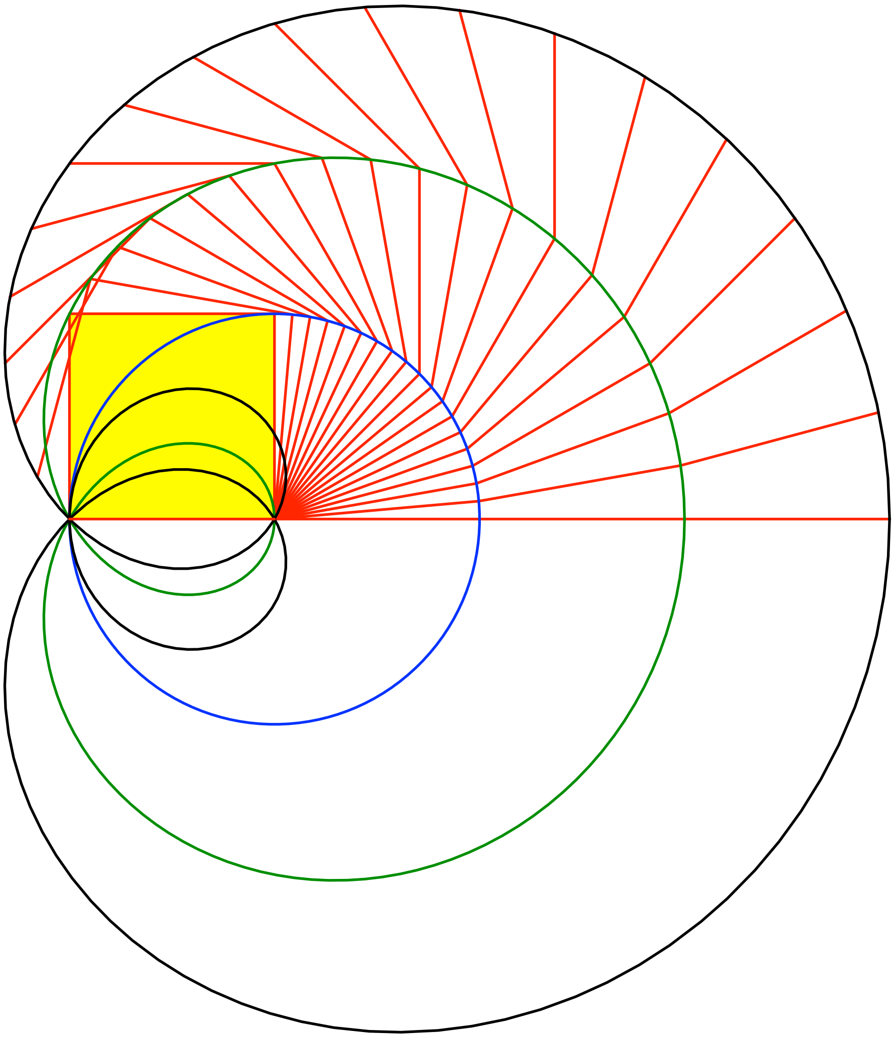

**Abb. 5: Gelenkmodell mit vier Teilen**

Die Kollision tritt bei einem Außenwinkel von etwa 77.32658862° ein (Abb. 6).

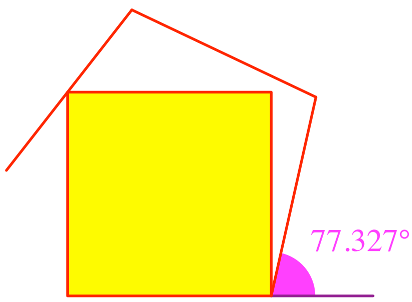


**Abb. 6: Kollision**

Die Abbildung 7 zeigt die entsprechende Situation beim regelmäßigen Fünfeck.

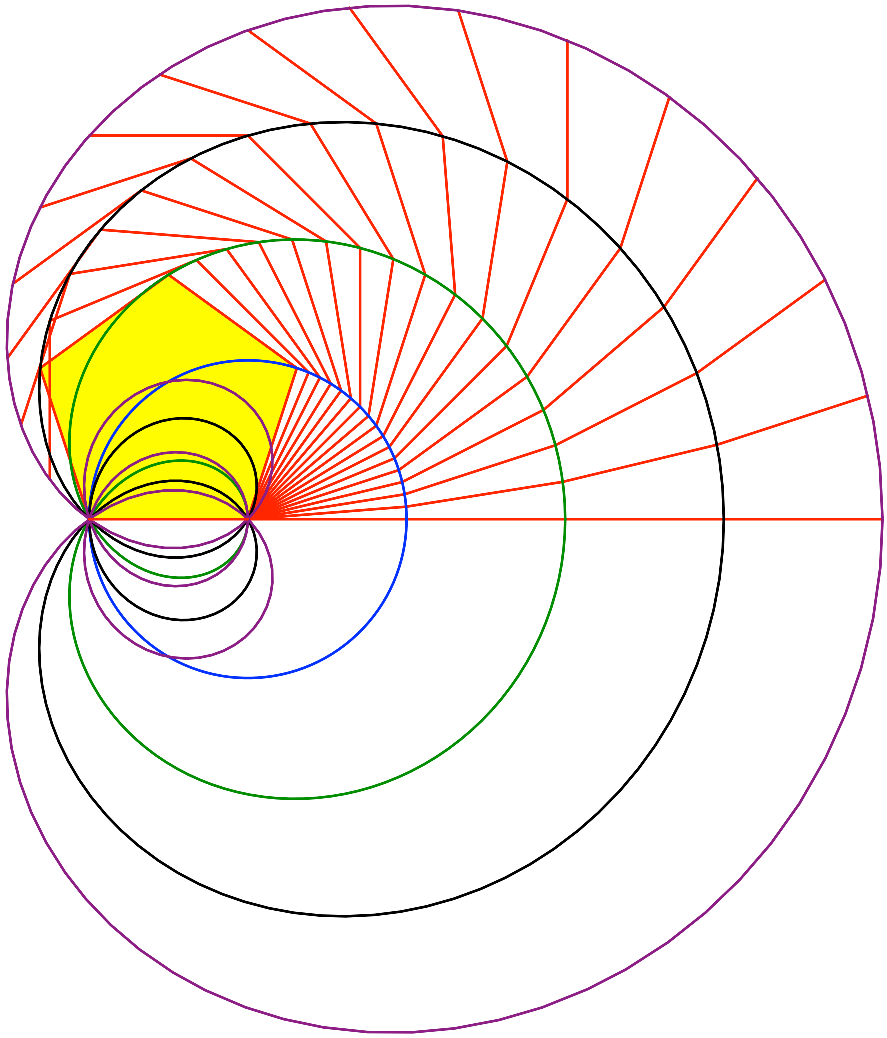

**Abb. 7: Gelenkmodell mit fünf Teilen**

Die Kollision tritt bei einem Außenwinkel von etwa 63.165° ein (Abb. 8).

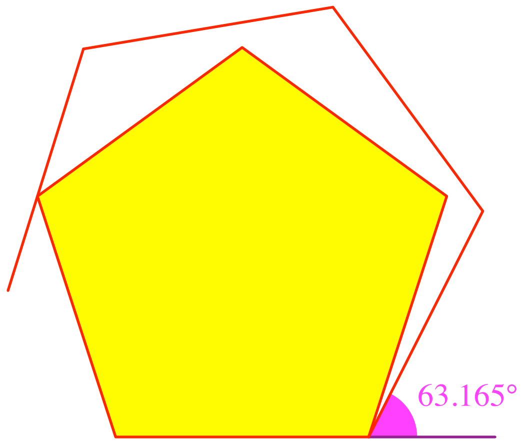


**Abb. 8: Kollision**