

Hans Walser, [20071126a]

Die Drei-Balken-Waage

Anregung: J. A., B.

1 Die Zwei-Balken-Waage

Eine bekannte Denksportaufgabe läuft unter dem Namen "The Odd Ball Problem". Darin geht es darum, von zwölf optisch nicht unterscheidbaren Kugeln durch Wägen mit einer Zwei-Balken-Waage die eine Kugel zu bestimmen, deren Gewicht vom Gewicht der übrigen elf Kugeln abweicht. Man weiss nicht, ob die "odd ball" schwerer oder leichter ist. Die eigentliche Denksportaufgabe besteht darin, mit möglichst wenigen Wägungen auszukommen.



Zwei-Balken-Waage

Das nahe liegende Vorgehen besteht darin, die Kugeln in drei Vierergruppen aufzuteilen und zwei dieser drei Vierergruppen gegeneinander zu wägen. Je nach Ausgang der Wägung werden die beiden Vierergruppen, die in der nachfolgenden zweiten Wägung gegeneinander gewogen werden, bestimmt, und so verfährt man auch für die dritte Wägung.

Es gibt aber auch interessante andere Lösungswege. Ebenso kann das Problem auf mehr als 12 Kugeln verallgemeinert werden.

Links:

<http://www.cut-the-knot.org/blue/OddballProblem1.shtml>

<http://www.cut-the-knot.org/blue/weight1.shtml>

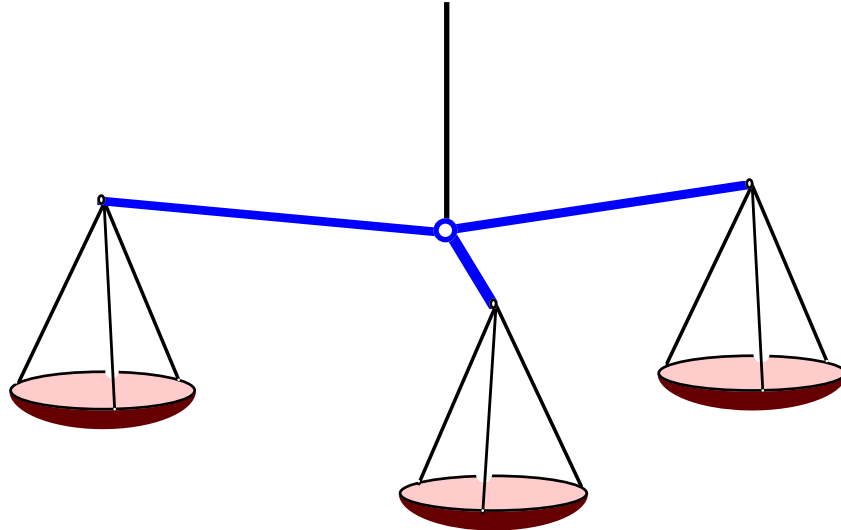
2 Die Drei-Balken-Waage

Es gibt zwei Konstruktionsmöglichkeiten, eine horizontale und eine vertikale. Physikalisch laufen beide nach demselben Prinzip.

Der geneigte Leser ist eingeladen, sich zu überlegen, was „Gleichgewicht“ bei den beiden Waagentypen bedeutet.

2.1 Horizontale Drei-Balken-Waage

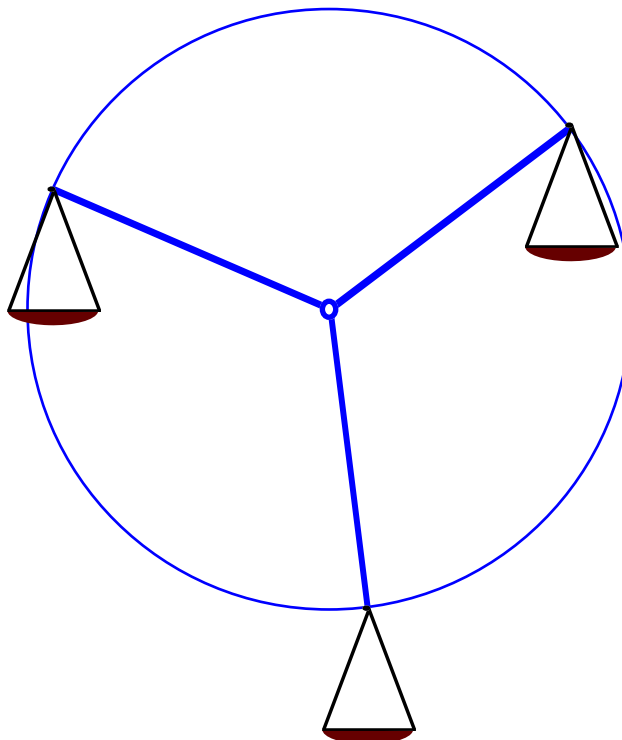
Wir denken uns einen horizontal liegenden Mercedes-Stern, der in der Mitte in einem Kugelgelenk aufgehängt oder durch ein Nadelgelenk unterstützt ist. An jeder Sternspitze hängt eine Waagschale.



Horizontale Drei-Balken-Waage

2.2 Vertikale Drei-Balken-Waage

Idee: Riesenrad mit drei Gondeln.



Riesenrad mit drei Gondeln

3 Das Odd-Ball-Problem und die Drei-Balken-Waage

Wir teilen die 12 Kugeln in drei Vierergruppen auf und geben jede Vierergruppe in eine der drei Waagschalen. Wenn nun eine der Waagschalen unten ist und die beiden anderen Waagschalen auf gleicher Höhe oben, ist in der unteren Waagschale die „odd ball“, und sie ist schwerer. Nun nehmen wir drei der vier Kugeln aus der unteren Waagschale und geben je eine in eine Waagschale. Falls diese im Gleichgewicht bleiben, ist die vierte Kugel die schwerere, ansonsten ist es die Kugel in der wiederum unteren Waagschale.

Falls die „odd ball“ leichter ist, geht eine der Waagschalen jeweils nach oben und wir können analog weiterfahren und schließen.

Wir kommen also mit zwei Wägungen aus.

Mit der Drei-Balken-Waage können wir das „odd ball problem“ für 48 Kugeln mit 3 Wägungen lösen: wir teilen die 48 Kugeln in vier Gruppen zu je 12 Kugeln auf und legen je eine Zwölfergruppe in eine Waagschale. Bei Gleichgewicht ist die faule Kugel in der vierten Zwölfergruppe und wir können wie oben mit zwei weiteren Wägungen weiterfahren. Bei Ungleichgewicht erhalten wir ebenfalls die Information, in welcher Zwölfergruppe die faule Kugel ist (inklusive der Zusatzinformation, ob die faule Kugel schwerer oder leichter ist). Wir können auch da wie oben weiterfahren.

Bei $3 \cdot 4^{n-1}$ Kugeln reichen n Wägungen mit der Drei-Balken-Waage.

4 Ein Paritätsproblem

Nun ist man versucht, eine Waage mit zwölf Waagschalen zu bauen und das „odd ball“ Problem mit einer einzigen Wägung zu lösen. Das geht aber in die Hosen: Wir wissen dann nicht, ob die unterste Waagschale die „odd ball“ als schwerere Kugel enthält oder die oberste Waagschale die „odd ball“ als leichtere Kugel. Das liegt daran, dass 12 eine gerade Zahl ist und wir somit paarweise diametrale Waagschalen haben.

Eine Zwölf-Balken-Waage enthält eben auch Zwei-Balken-Waagen, Drei-Balken-Waagen, Vier-Balken-Waagen und Sechs-Balken-Waagen. Man muss einfach die Waagschalen dazwischen leer lassen.

Bei 11 oder allgemein einer ungeraden Anzahl Kugeln kämen wir mit einer entsprechenden Waage mit einer Wägung durch, weil wir dann nicht gleichzeitig eine unterste und eine oberste Waagschale hätten.

5 Konstruktionsvorschläge

Für ein Modell einer n -Balken-Waage arbeiten wir mit einer Kreisteilungsscheibe aus Plexiglas (Modell nicht ausprobiert). Bei der vertikalen Waage (Riesenrad) dürfte die reibungsfreie Lagerung der Radachse ein Problem sein.