

Hans Walser, [20180511]

Drachenkörper

Anregung: Werner Blum, Braunschweig

1 Worum es geht

Ausgehend vom Würfel werden mit der immer gleichen Technik zuerst das Rhombendodekaeder und anschließend der Deltoidvierundzwanzigflächner (Adam/Wyss 1994, S. 76) erarbeitet. Dabei spielen Kantenberührungskugeln eine zentrale Rolle.

Die Seitenflächen sind Drachenvierecke.

2 Würfel

Wir arbeiten mit dem Würfel mit den Eckpunktkoordinaten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (Abb. 1a).

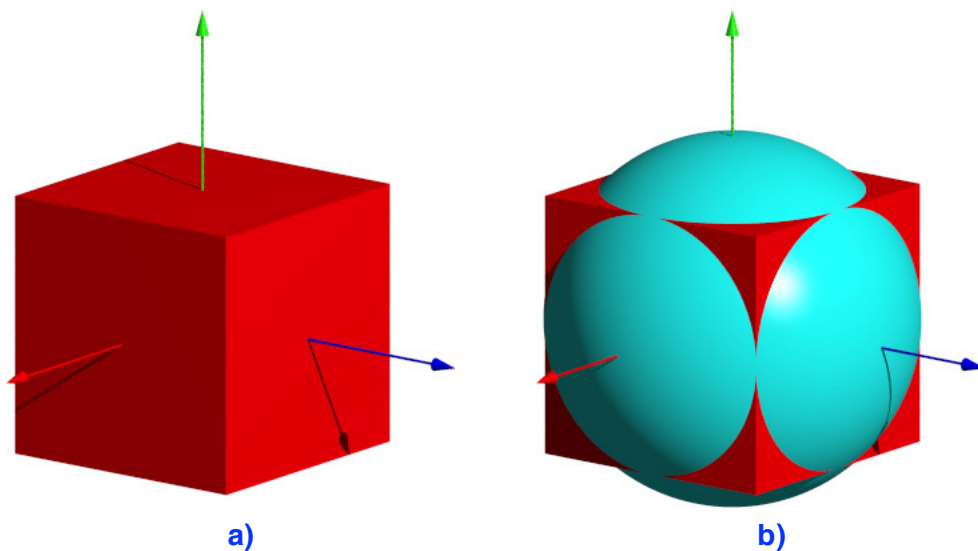


Abb. 1: Würfel und Kantenmittenkugel

Der Würfel hat eine Kantenmittenkugel (Abb. 1b) mit dem Radius $\sqrt{2}$. Die zwölf Berührungspunkte der Kantenmittenkugel mit den Würfelkanten sind die Ecken eines Kuboktaeders.

Die quadratischen Seitenflächen des Würfels sind Sonderfälle von Drachenvierecken. Wir können den Würfel also als Sonderfall eines Drachenkörpers verstehen, eines Polyeders also, das von kongruenten Drachenvierecken begrenzt ist.

3 Rhombendodekaeder

3.1 Konstruktion

Wir zeichnen nun die zwölf Tangentialebenen an die Kantenmittenkugel, welche diese in den Berührungspunkten mit den Würfelkanten berühren. Diese zwölf Tangentialebenen begrenzen ein Rhombendodekaeder. Die Kantenmittenkugel des Würfels ist nun die Inkugel des Rhombendodekaeders.

Die Abbildung 2a zeigt einen berührenden Rhombus, die Abbildung 2b drei weitere.

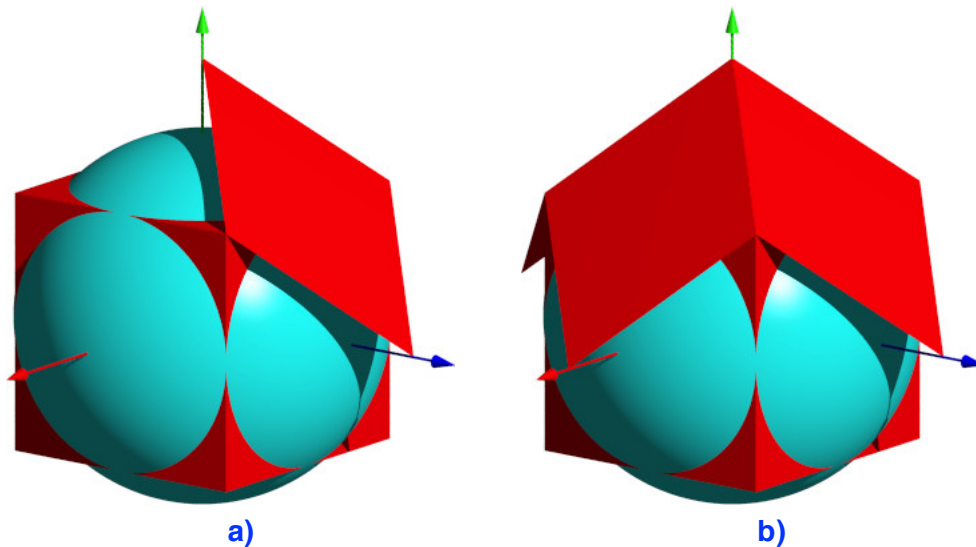


Abb. 2: Tangentiale Rhomben

Die Abbildung 3a zeigt das fertige Rhombendodekaeder. Es kann auch als Sonderfall eines Drachenkörpers gesehen werden.

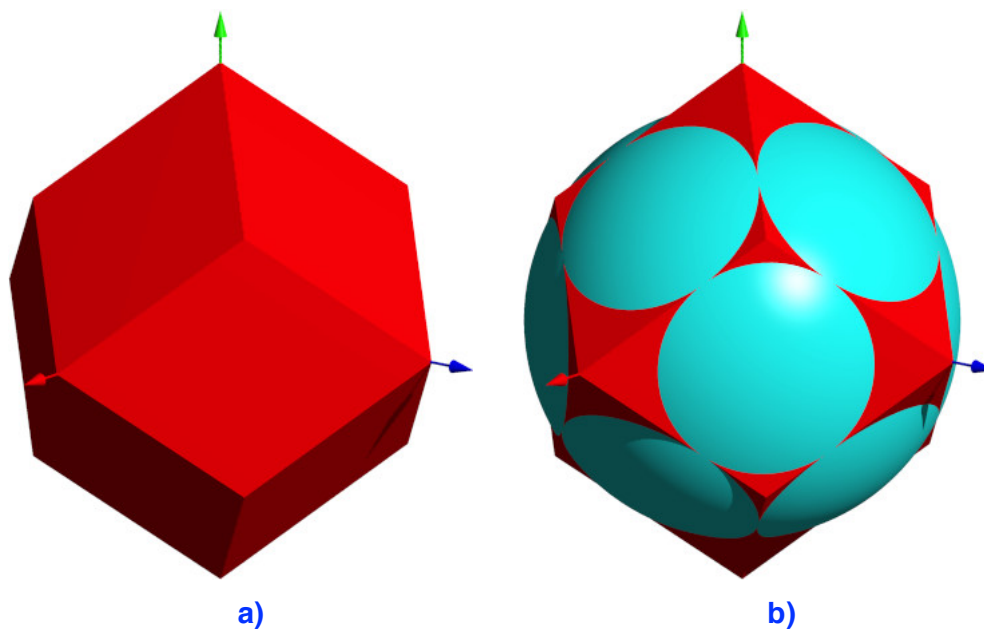


Abb. 3: Rhombendodekaeder. Kantenberührkugel

Das Rhombendodekaeder hat 14 Eckpunkte. Acht davon sind die ehemaligen Würfel-ecken mit den Koordinaten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, die sechs zusätzlichen Ecken haben die Koordinaten $(\pm 2, 0, 0), (0, \pm 2, 0), (0, 0, \pm 2)$.

Das Volumen des Rhombendodekaeders ist doppelt so groß wie das Volumen des Startwürfels.

Das Rhombendodekaeder hat eine Kantenberührkugel mit dem Radius $\sqrt{\frac{8}{3}}$ (Abb. 3b). Die Berührungspunkte auf den Kanten dritteln diese.

3.2 Ein nichtarchimedischer und ein archimedischer Körper

Die Berührungspunkte auf den Kanten sind die Ecken eines Körpers mit sechs Quadraten (rot in Abb. 4a), acht gleichseitigen Dreiecken (zyan in Abb. 4a) und zwölf Rechtecken mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2} : 1$ (DIN-Format, vgl. Walser 2013) (gelb in Abb. 4a).

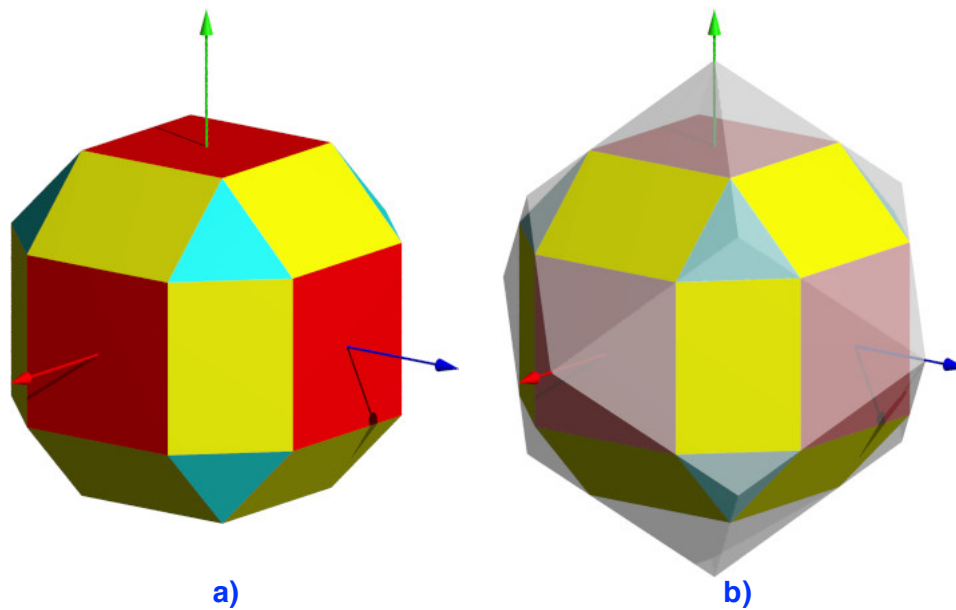


Abb. 4: Verschiedene Seitenflächen

Die gelben Seitenrechtecke liegen in den Seitenrhomben des Rhombendodekaeders (Abb. 4b).

Dieser Körper der Abbildung 4a gehört nicht zu den archimedischen Körpern.

Hingegen gibt es einen verwandten archimedischen Körper, das Rhombenkuboktaeder (Abb. 5a, vgl. Adam/Wyss 1994, S. 57, Abb. C).

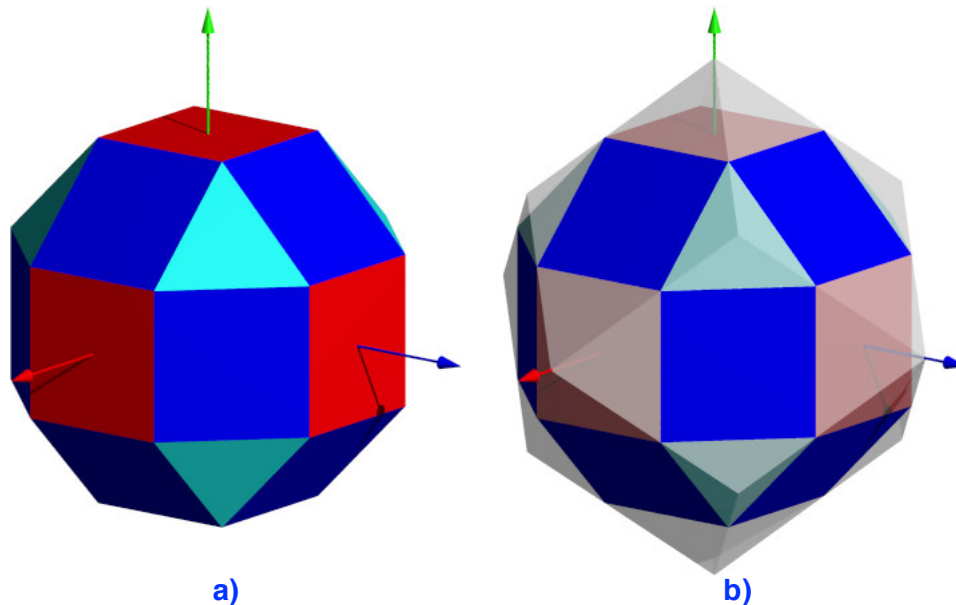


Abb. 5: Rhombenkuboktaeder

Das Rhombenkuboktaeder ist berandet von 18 Quadraten (sechs roten und zwölf blauen in Abb. 5a) sowie acht gleichseitigen Dreiecken. Die blauen Quadrate liegen ebenfalls in den Seitenrhomben des Rhombendodekaeders (Abb. 5b).

3.3 Bemerkungen

- a) Die Tangentialebenen an die Kantenmittenkugel sind auch die äußeren Winkelhalbierendeebenen der Diederwinkel des Würfels.
- b) Dasselbe Spielchen ginge auch mit einem Oktaeder und seiner Kantenmittenkugel als Ausgangsfigur. Allerdings kann das Oktaeder nicht als Sonderfall eines Drachenviereckes gesehen werden.

4 Deltoidvierundzwanzigflächner

Nun geht das Spielchen weiter. Wir zeichnen nun die 24 Tangentialebenen an die Kantenberührkugel des Rhombendodekaeders, welche diese in den Berührungspunkten mit den Rhombendodekaederkanten berühren. Die Abbildung 6a zeigt ein Beispiel. Diese Ebenen sind auch die äußeren Winkelhalbierendeebenen der Diederwinkel des Rhombendodekaeders.

Diese 24 Tangentialebenen begrenzen einen Deltoidvierundzwanzigflächner (Abb. 6b). Die Seitenflächen sind Drachenvierecke (Deltoide). Die Kantenberührkugelkugel des Rhombendodekaeders ist nun die Inkugel des Deltoidvierundzwanzigflächners.

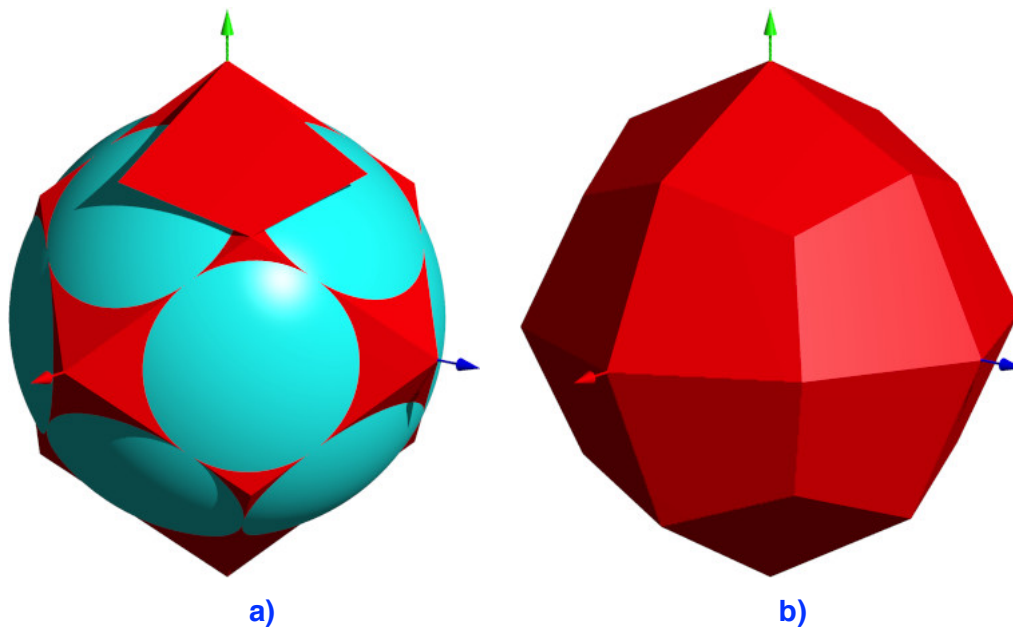


Abb. 6: Deltoidvierundzwanzigflächner

Der Deltoidvierundzwanzigflächner hat 26 Eckpunkte. Zunächst die acht ehemaligen Würfecken mit den Koordinaten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ und die zusätzlichen sechs Eckpunkte des Rhombendodekaeders mit den Koordinaten $(\pm 2, 0, 0), (0, \pm 2, 0), (0, 0, \pm 2)$. Neu kommen dazu die zwölf Eckpunkte mit den Koordinaten $(0, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{4}{3}), (\pm \frac{4}{3}, 0, \pm \frac{4}{3}), (\pm \frac{4}{3}, \pm \frac{4}{3}, 0)$.

Das Volumen des Deltoidvierundzwanzigflächners beträgt $\frac{4}{3}$ des Volumens des Rhombendodekaeders und $\frac{8}{3}$ des Würfelvolumens.

Die Abbildung 7 zeigt ein Seiten-Drachenviereck mit Vermaßung gemäß unserer Wahl des Koordinatensystems, die Abbildung 8 eine Abwicklung.

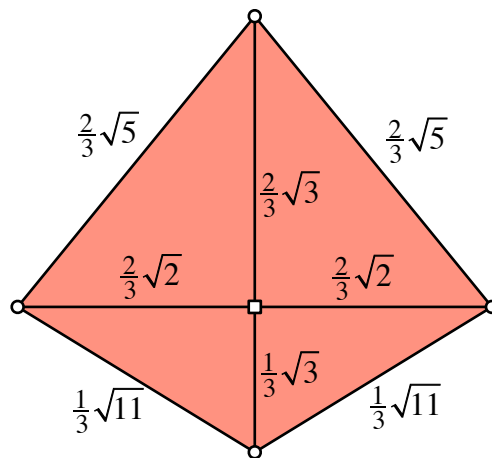


Abb. 7: Drachenviereck

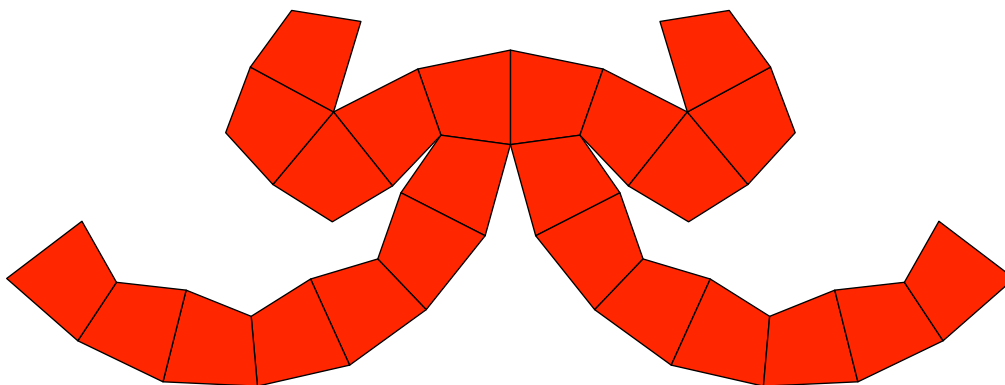


Abb. 8: Abwicklung

Die Abbildung 9 zeigt einen der sechs für das Flechtmodell benötigten Streifen. Jeder Streifen besteht aus acht Drachenvierecken plus zwei berlappungseinheiten.

Im Anhang findet sich Schnittmuster für zwei Streifen.

Die Abbildung 10 zeigt das Flechtmodell. Es genügen drei Farben, eine Farbe für je zwei Streifen.

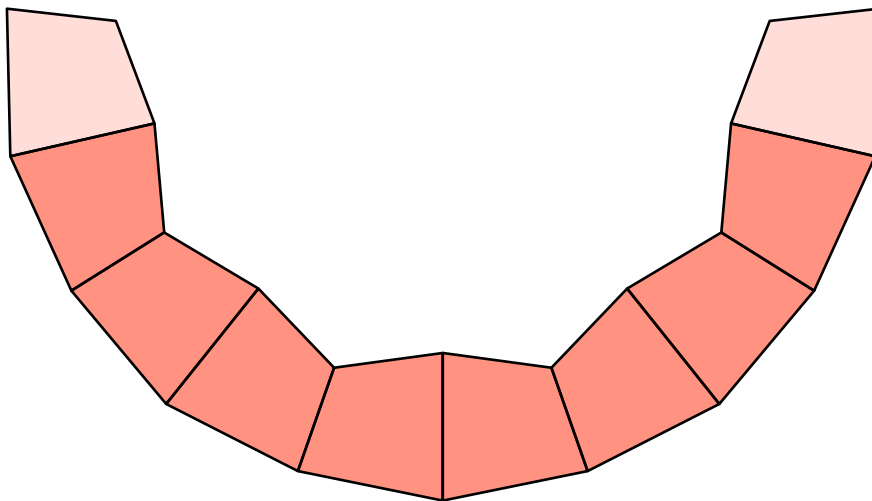


Abb. 9: Streifen für Flechtmodell



Abb. 10: Flechtmodell

5 Geht es weiter?

Der Deltoidvierundzwanzigflächner hat keine Kantenberührkugel. Zwar gibt es eine Kugel, welche alle langen Kanten der Drachenvierecke berührt (Abb. 11a) und eine zweite Kugel, welche alle kurzen Kanten der Drachenvierecke berührt (Abb. 11b).

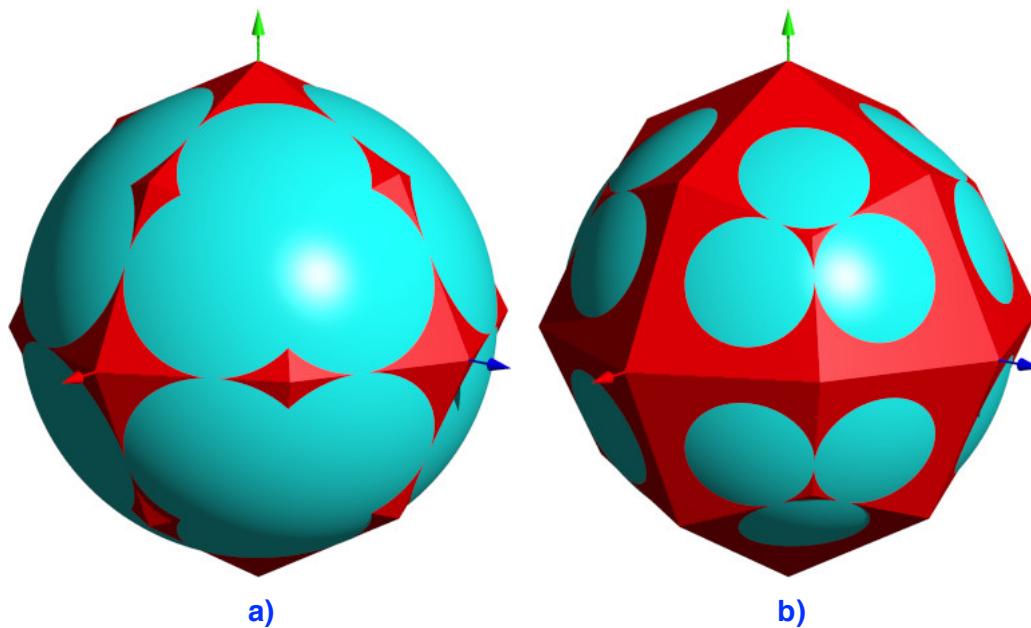


Abb. 11: Keine ganzheitliche Kantenberührkugel

Wenn wir gleichwohl mit Tangentialebenen in den Berührungspunkten arbeiten, ergeben sich wieder Drachenvierecke. Diese sind aber nicht mehr alle kongruent.

6 Variante

Ausgehend vom regulären Ikosaeder oder dem regulären Dodekaeder ergibt sich mit der Kantenmittenkugel das Rhombentriakontaeder. Dieses hat eine Kantenberührkugel, womit wir zu einem Drachenkörper gelangen können.

Literatur

Adam, Paul und Wyss, Arnold (1994): *Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde*. 2. Auflage. Bern: Verlag Paul Haupt. ISBN 3-258-04943-2.

Walser, Hans (2013): *DIN A4 in Raum und Zeit. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader*. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2013. ISBN 978-3-937219-69-1.

Anhang

