Hans Walser, [20080910a]

Doppelter Schnittpunkt

1 Der Schnittpunkt

Wir beginnen mit einem Sehnensechseck $A_0B_2A_1B_0A_2B_1$ mit der Eigenschaft, dass die an einer Ecke B_i anstoßenden Seiten jeweils gleich lang sind, also:

$$\overline{A_1B_0} = \overline{A_2B_0}, \quad \overline{A_2B_1} = \overline{A_0B_1}, \quad \overline{A_0B_2} = \overline{A_1B_2}$$

Dann haben die drei Geraden $A_iB_i, i \in \{0,1,2\}$, einen gemeinsamen Schnittpunkt P (Abb. 1).

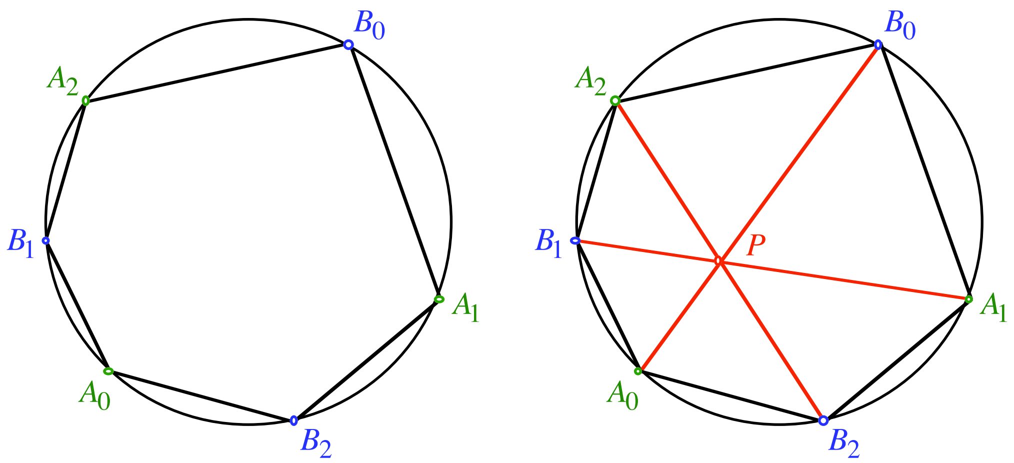

Abb. 1 Sechseck und Schnittpunkt

Dieser Schnittpunkt P kann auf zwei Arten als „besonderer Punkt“ gesehen werden.

2 Inkreismittelpunkt

Im Dreieck $A_0A_1A_2$ ist der Punkt P der Schnittpunkt der *Winkelhalbierenden*, also der Inkreismittelpunkt (Abb. 2).

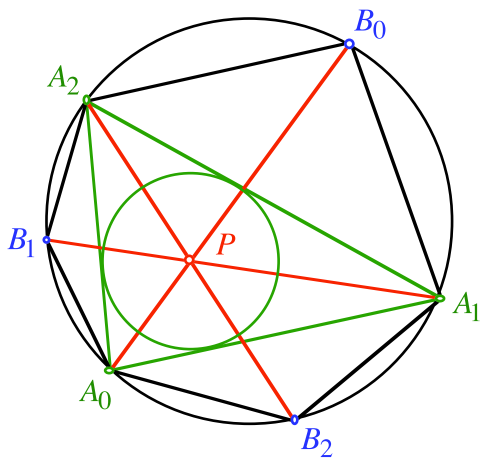

Abb. 2 Inkreismittelpunkt

Die Winkel $\sphericalangle A_1A_0B_0$ und $\sphericalangle B_0A_0A_2$ sind nämlich Peripheriewinkel über gleich langen Sehnen und daher gleich groß. Die Gerade A_0B_0 halbiert also den Dreieckswinkel bei A_0. Entsprechendes gilt für die beiden anderen Geraden.

Damit ist auch bewiesen, dass die drei Geraden A_iB_i, $i \in \{0,1,2\}$, tatsächlich kopunktal sind.

3 Höhenschnittpunkt

Die Abbildung 3 lässt vermuten, dass der Schnittpunkt P der *Höhenschnittpunkt* im Dreieck $B_0B_1B_2$ ist.

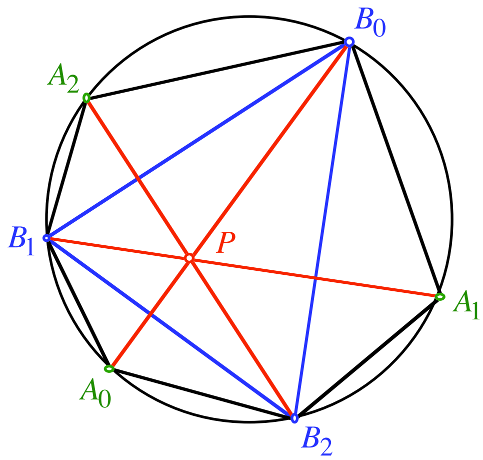

Abb. 3 Höhenschnittpunkt

Dies ist tatsächlich der Fall.

Die Winkel $\sphericalangle A_0B_1B_2$ und $\sphericalangle B_2B_1A_1$ sind als Peripheriewinkel über gleich langen Sehnen gleich groß; dasselbe gilt für die Winkel $\sphericalangle B_1B_2A_0$ und $\sphericalangle A_2B_2B_1$. Die beiden Dreiecke $B_1B_2A_0$ und B_1B_2P sind daher spiegelbildlich bezüglich der Seite B_1B_2. Somit steht die Gerade A_0P, also die Gerade A_0B_0, senkrecht auf der Seite B_1B_2 und ist eine Höhe des Dreieckes $B_0B_1B_2$. Analog für die beiden anderen Geraden.