

Hans Walser, [20140903]

## Dodekaeder

### 1 Worum geht es?

Es wird eine einparametrische Schar von Dodekaedern vorgestellt, welche das reguläre Pentagondodekaeder und das Rhombendodekaeder enthält.

### 2 Drei Rhomben

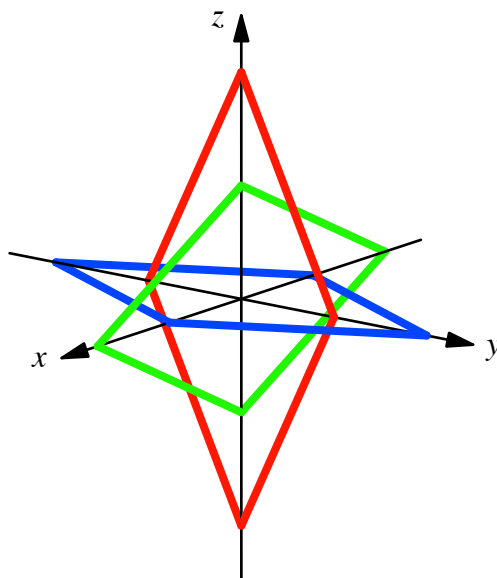
In einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem beginnen wir mit drei Rhomben mit den Eckpunkten:

Roter Rhombus:  $(0, 1, 0), (0, 0, t), (0, -1, 0), (0, 0, -t)$

Grüner Rhombus:  $(0, 0, 1), (t, 0, 0), (0, 0, -1), (-t, 0, 0)$

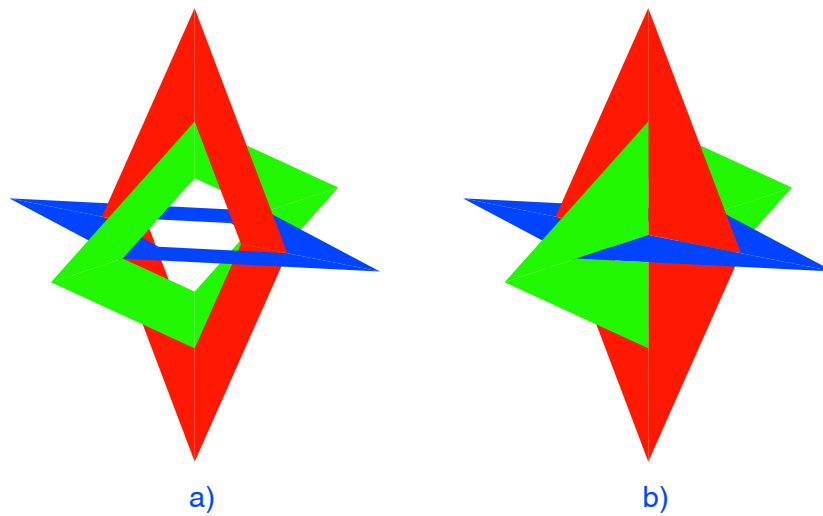
Blauer Rhombus:  $(1, 0, 0), (0, t, 0), (-1, 0, 0), (0, -t, 0)$

Die Abbildung 1 zeigt die Situation für  $t = 2$ .



**Abb. 1: Drei Rhomben**

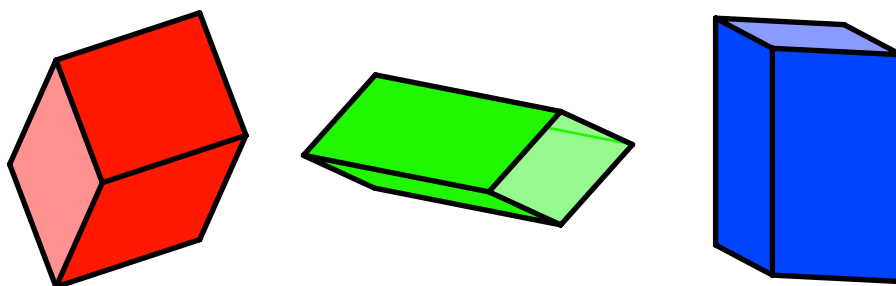
Die drei Rhomben sind topologisch in der Situation von drei borromeischen Ringen (Abb. 2a). Die Abbildung 2b zeigt das Durchdringungsverhalten der drei Rhomben.



**Abb. 2: Borromeische Ringe. Durchdringung**

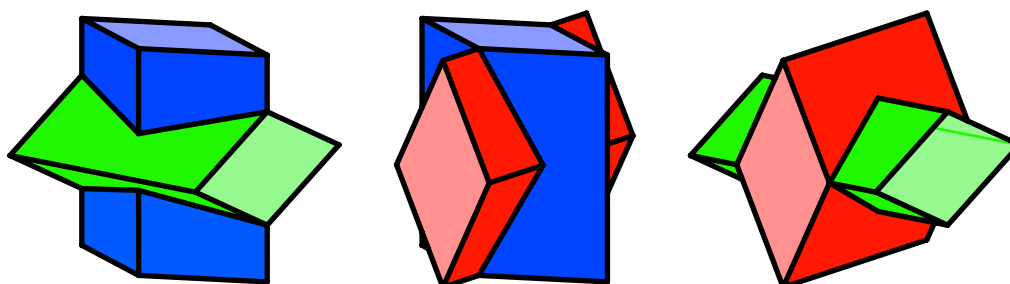
### 3 Drei Prismen

Wir verwenden jeden Rhombus als Leitlinie eines geraden Prismas (Abb. 3).



**Abb. 3: Drei Prismen**

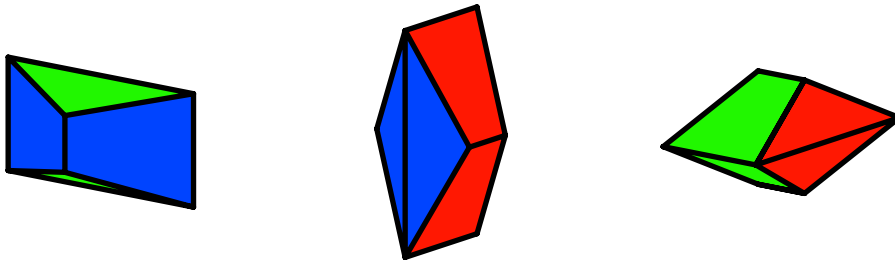
Die Abbildung 4 zeigt je zwei der drei Prismen.



**Abb. 4: Paare von Prismen**

#### 4 Oktaeder

Die Abbildung 5 zeigt die Schnittfiguren der Prismenpaare der Abbildung 4.

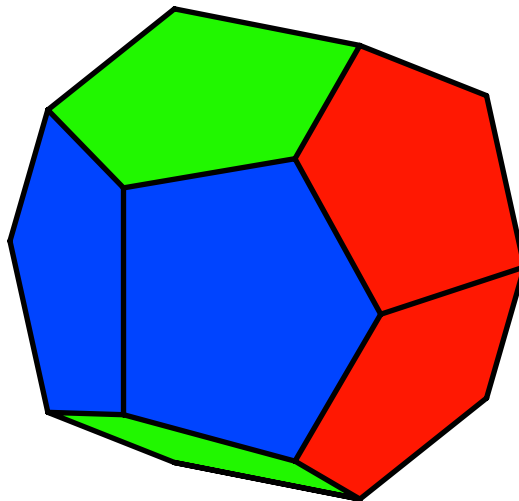


**Abb. 5: Schnittfiguren**

Die Schnittfiguren haben je acht Seitenflächen, sind also Oktaeder. Je vier Seitenflächen sind kongruente Dreiecke oder kongruente gleichschenklige Trapeze.

#### 5 Dodekaeder

Die Schnittfigur aller drei Prismen gibt ein Dodekaeder (Abb. 6).



**Abb. 6: Dodekaeder**

Das Dodekaeder besteht in der Regel (eine Ausnahme werden wir gleich kennen lernen) aus zwölf kongruenten, aber nicht regelmäßigen Fünfecken. Die Fünfecke sind achsensymmetrisch. Vier der fünf Kanten sind gleich lang. Die fünfte Kante („Basis“) hat eine abweichende Länge. An einer Basis stoßen jeweils gleichfarbene Fünfecke zusammen.

Der Winkel  $\alpha$  zwischen zwei an einer Basis zusammenstoßenden Fünfecken beträgt:

$$\alpha = 2\arctan(t)$$

Im gezeichneten Sonderfall mit  $t = 2$  ist also  $\alpha = 2\arctan(2) \approx 126.87^\circ$ .

## 6 Sonderfälle

### 6.1 Rhombendodekaeder

Für  $t = 1$  ergibt sich das *Rhombendodekaeder*. Die Basis der Fünfecke schrumpft zu einem Punkt, so dass Rhomben übrig bleiben.

### 6.2 Reguläres Pentagondodekaeder

Für  $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$  (Goldener Schnitt) ergibt sich das *regelmäßige Pentagondodekaeder*.