Hans Walser, [20170616]

# Diagonalenschnittwinkel

## 1 Worum geht es?

Unter welchen Winkeln scheiden sich die Mittelpunktsdiagonalen in einem $n$-d-Hyperwürfels?

## 2 Beispiele

Die beiden Diagonalen eines Quadrates sind orthogonal.

Die vier Raumdiagonalen eines Würfels (Abb. 1) schneiden sich paarweise unter dem spitzen Winkel $\gamma$ :

$$\gamma = 2\arctan\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\tfrac{1}{3}\right) \approx 70.5288° \tag{1}$$

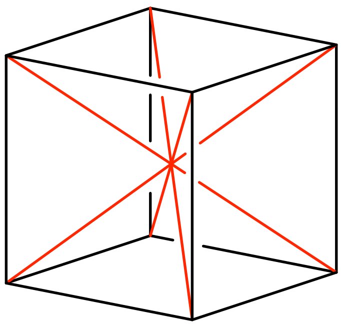

**Abb. 1: Raumdiagonalen des Würfels**

Spannend wird es im 4d-Raum. Die acht Mittelpunktsdiagonalen haben die Richtungsvektoren:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
\vec{r}_4 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_7 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2}$$

Damit wird zum Beispiel:

$$\gamma_{0,1} = \measuredangle\left(\vec{r}_0, \vec{r}_1\right) = \arccos\left(\tfrac{2}{4}\right) = 60° \tag{3}$$

$$\gamma_{0,3} = \measuredangle\left(\vec{r}_0, \vec{r}_3\right) = \arccos\left(\tfrac{0}{4}\right) = 90° \tag{4}$$

$$\gamma_{0,7} = \measuredangle\left(\vec{r}_0, \vec{r}_7\right) = \arccos\left(\tfrac{-2}{4}\right) = 120° \tag{5}$$

Der spitze Winkel bei (5) ist also 60°.

Im 4d-Hyperwürfel kommen also zwei verschiedene Schnittwinkel vor.

## 3 Die Hamming-Distanz

Die Komponenten der Vektoren $\vec{r}_0$ und $\vec{r}_1$ unterscheiden sich an genau einer Stelle. Geometrisch heißt das, dass die zugehörigen Eckpunkte des 4d-Hyperwürfels durch genau eine Kante verbunden sind. Sie haben die Hamming-Distanz 1. Die zugehörigen Mittelpunktsdiagonalen schneiden sich unter 60°.

Die Komponenten der Vektoren $\vec{r}_0$ und $\vec{r}_3$ unterscheiden sich an genau zwei Stellen. Geometrisch heißt das, dass ein Kantenweg von einem Eckpunkt zum anderen über zwei Kanten verläuft (es gibt zwei solche Kantenwege). Die beiden Eckepunkte haben die Hamming-Distanz 2 (die euklidische Distanz ist $2\sqrt{2}$). Die zugehörigen Mittelpunktsdiagonalen sind orthogonal.

Wir sehen, wie der Hase läuft.

## 4 Allgemeine Formel

Für zwei Mittelpunktsdiagonalen im $n$-d-Hyperwürfel, deren Endpunkte die Hamming-Distanz $d$ haben, ergibt sich der spitze Schnittwinkel $\gamma$ :

$$\gamma = \arccos\left(\frac{|n-2d|}{n}\right) \tag{6}$$

## 5 Tabelle

Die Tabelle 1 zeigt einige Werte.

| $n \backslash d$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 90 | | | | | | | |
| 3 | 70.5288 | | | | | | | |
| 4 | 60 | 90 | | | | | | |
| 5 | 53.1301 | 78.4630 | | | | | | |
| 6 | 48.1897 | 70.5288 | 90 | | | | | |
| 7 | 44.4153 | 64.6231 | 81.7868 | | | | | |
| 8 | 41.4096 | 60 | 75.5225 | 90 | | | | |
| 9 | 38.9424 | 56.2510 | 70.5288 | 83.6206 | | | | |
| 10 | 36.8699 | 53.1301 | 66.4218 | 78.4630 | 90 | | | |
| 11 | 35.0968 | 50.4788 | 62.9643 | 74.1734 | 84.7841 | | | |
| 12 | 33.5573 | 48.1897 | 60 | 70.5288 | 80.4059 | 90 | | |
| 13 | 32.2042 | 46.1869 | 57.4210 | 67.3801 | 76.6576 | 85.5883 | | |
| 14 | 31.0027 | 44.4153 | 55.1501 | 64.6231 | 73.3985 | 81.7868 | 90 | |
| 15 | 29.9264 | 42.8334 | 53.1301 | 62.1819 | 70.5288 | 78.4630 | 86.1774 | |
| 16 | 28.9550 | 41.4096 | 51.3178 | 60 | 67.9757 | 75.5225 | 82.8192 | 90 |

**Tab. 1: Schnittwinkel**