Hans Walser, [20170421]

Diagonalenschnittpunkte in regelmäßigen Vielecken

1 Worum geht es?

Es wird eine Vermutung über die Schnittpunkte von Diagonalen in regelmäßigen Vielecken ungerader Eckenzahl formuliert.

2 Terminologie

Eine Punkt durch welchen n Geraden verlaufen nennen wir einen Schnittpunkt n-ten Grades.

Die klassischen Schnittpunkte der Dreiecksgeometrie (Höhenschnittpunkt, Schwerlinienschnittpunkt, Mittelsenkrechtenschnittpunkt, Winkelhalbierendenschnittpunkt) sind Schnittpunkte dritten Grades.

3 Vielecke ungerader Eckenzahl

Wir zeichnen sämtliche Diagonalen in Vielecken ungerader Eckenzahl. Die Abbildung 1 zeigt die Situation für die Eckenzahlen 3 bis 13.

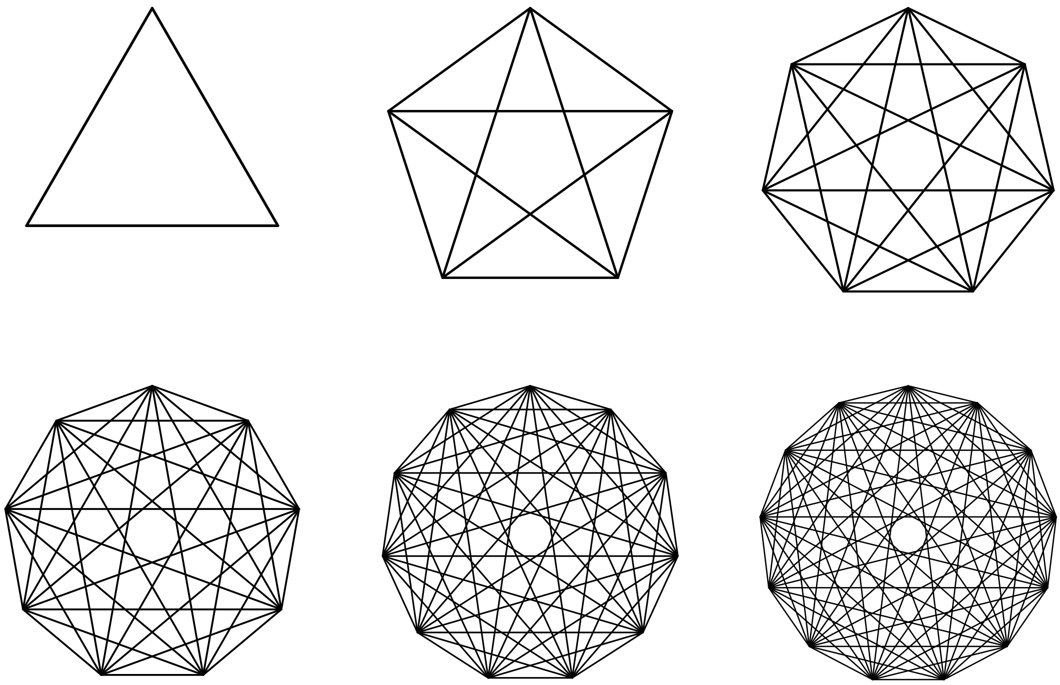


Abb. 1: Diagonalen

Im Innern der Vielecke nur Schnittpunkte zweiten Grades.

Im Folgenden weitere Beispiele.

Im regelmäßigen 15-Eck (Abb. 2) hat es zwar Diagonalenschnittpunkte zweiten Grades, die sehr nahe beieinander liegen. Aus Symmetriegründen kann aber ausgeschlossen werden, dass sie aufeinander fallen. Wir haben also nur Schnittpunkte zweiten Grades.

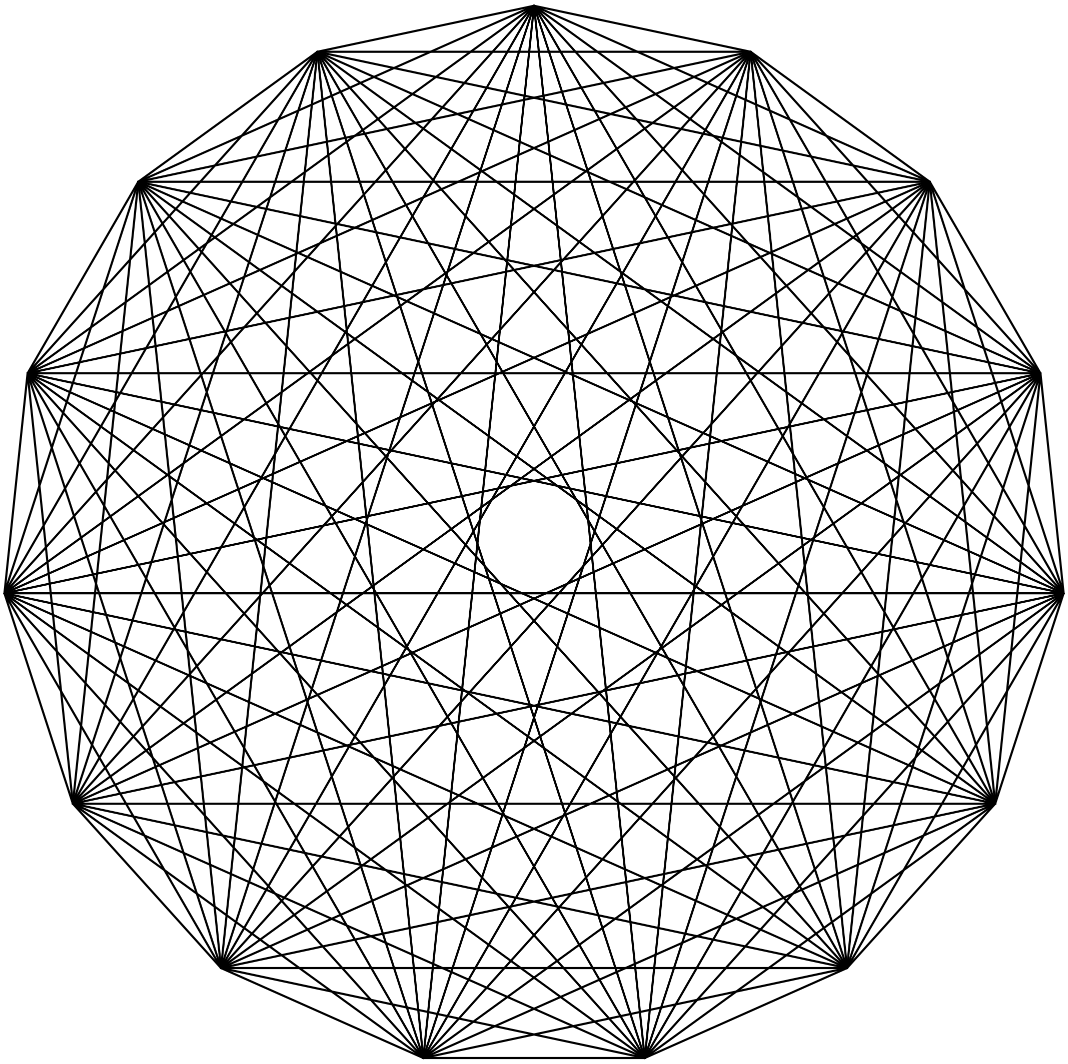


Abb. 2: Regelmäßiges 15-Eck

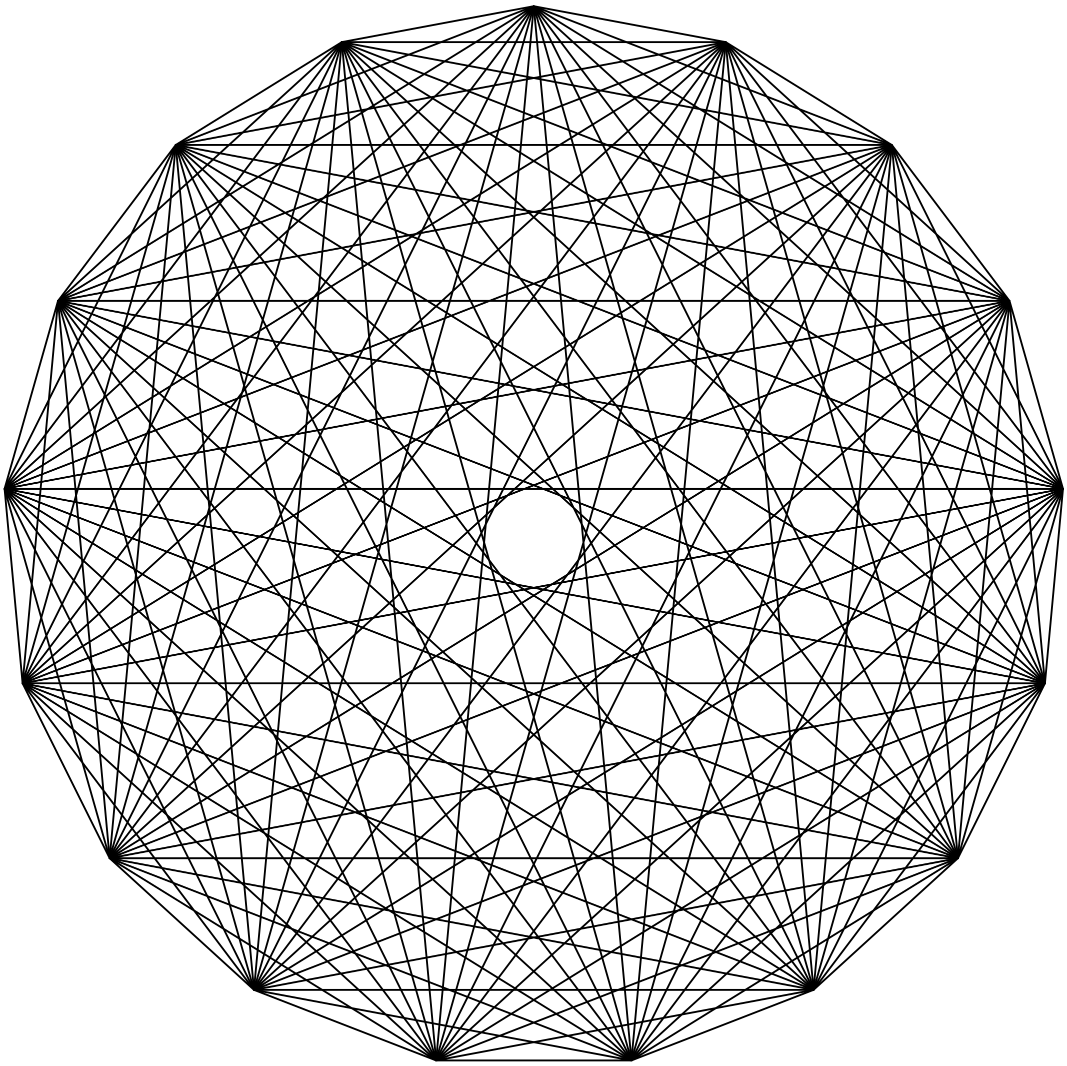


Abb. 3a: Regelmäßiges 17-Eck

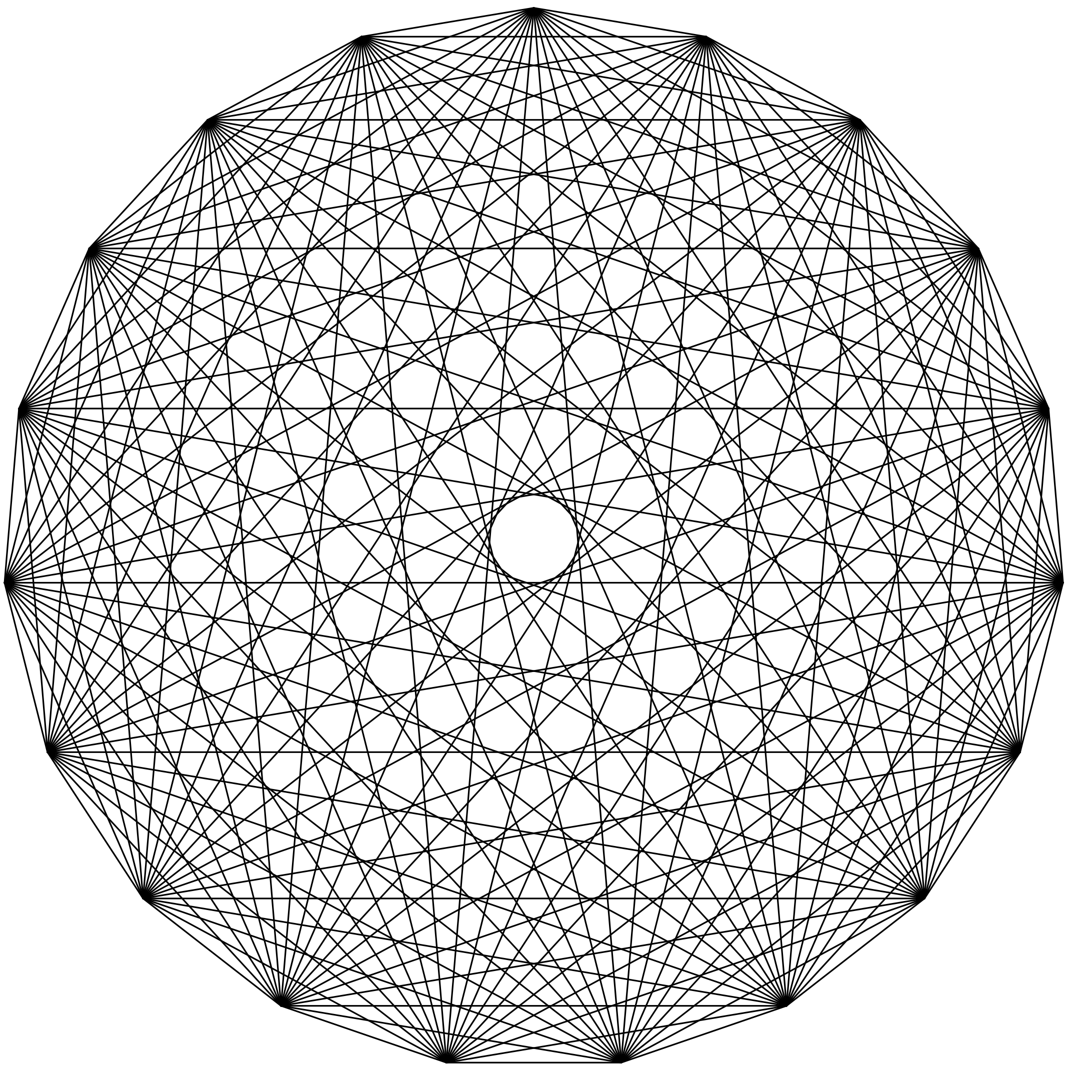


Abb. 3b: Regelmäßiges 19-Eck

Im regelmäßigen 27-Eck der Abbildung 4 sind einige „fast"-Beispiele von Schnittpunkten höheren Grades suggeriert. Sie erweisen sich bei näherem Hinsehen alle als falsch.

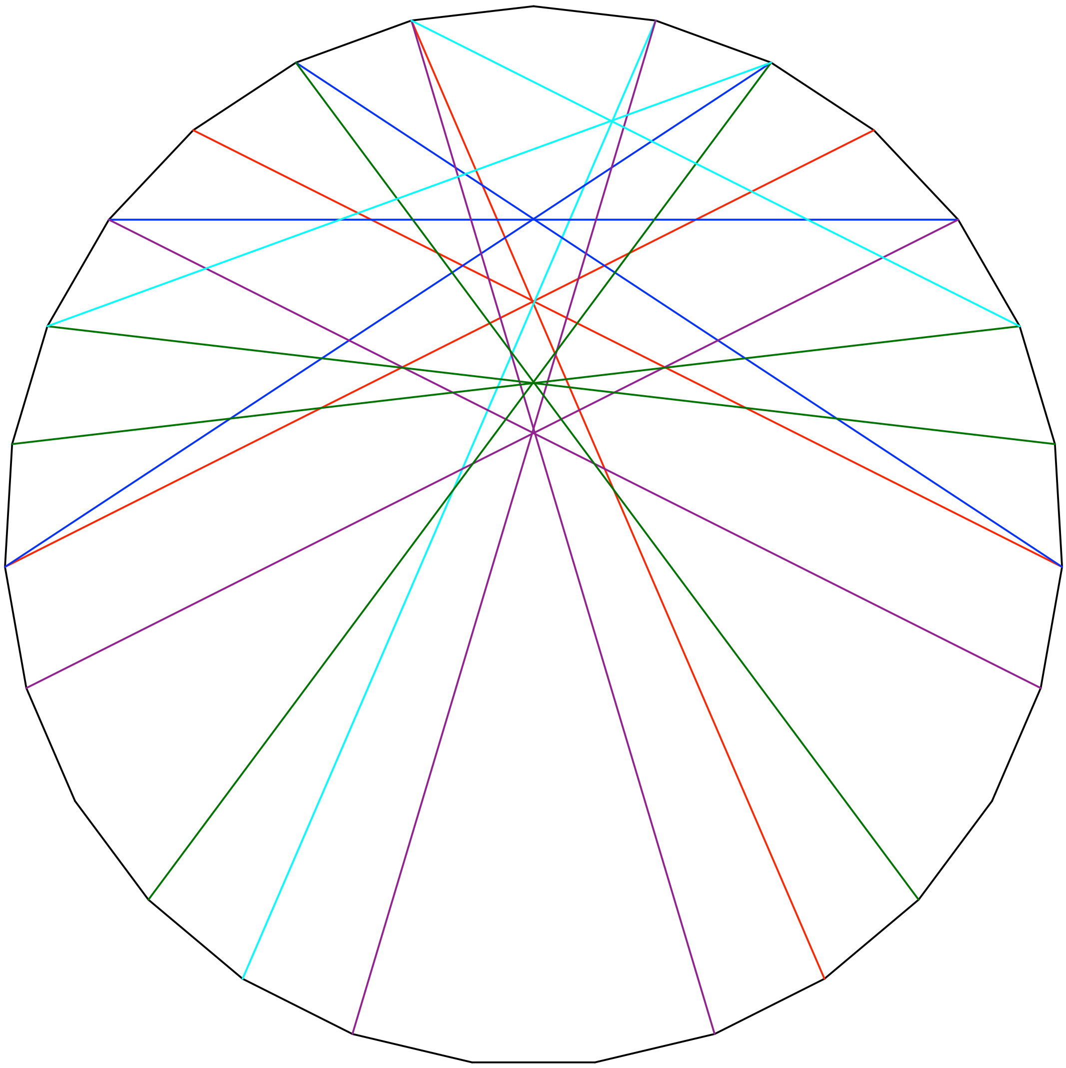


Abb. 4: Falsche Beispiele im 27-Eck

3.1 Vermutung

Im Innern eines Vieleckes mit ungerader Eckenzahl gibt es keinen Punkt der von mehr als zwei Diagonalen getroffen wird. Es gibt nur Diagonalenschnittpunkte zweiten Grades.

4 Gerade Eckenzahlen

Es sei $n = 2m$ die Eckenzahl.

Für allfällige Berechnungen setzen wir den Umkreisradius 1.

4.1 Mittelpunkt

Der Mittelpunkt wird von den m Mittelpunktsdiagonalen getroffen. Für $m \geq 3$ haben wir also als Mittelpunkte einen Schnittpunkt m-ten Grades (Abb. 5 für $m = 3$).

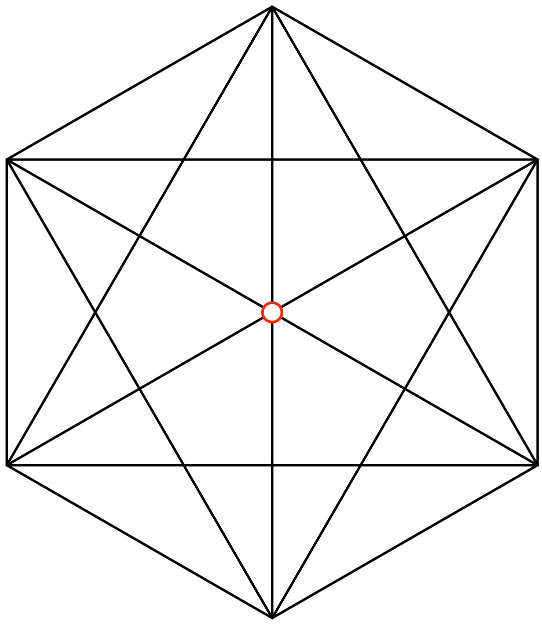


Abb. 5: Mittelpunkt

4.2 Diagonalenschnittpunkte außerhalb des Mittelpunktes

4.2.1 Regelmäßiges Achteck

Im Innern des regelmäßigen Achteckes (Abb. 6a) haben wir acht Schnittpunkte dritten Grades. Da eine der drei beteiligten Diagonalen auch Symmetrieachse ist, ist die Schnittpunkteigenschaft trivial.

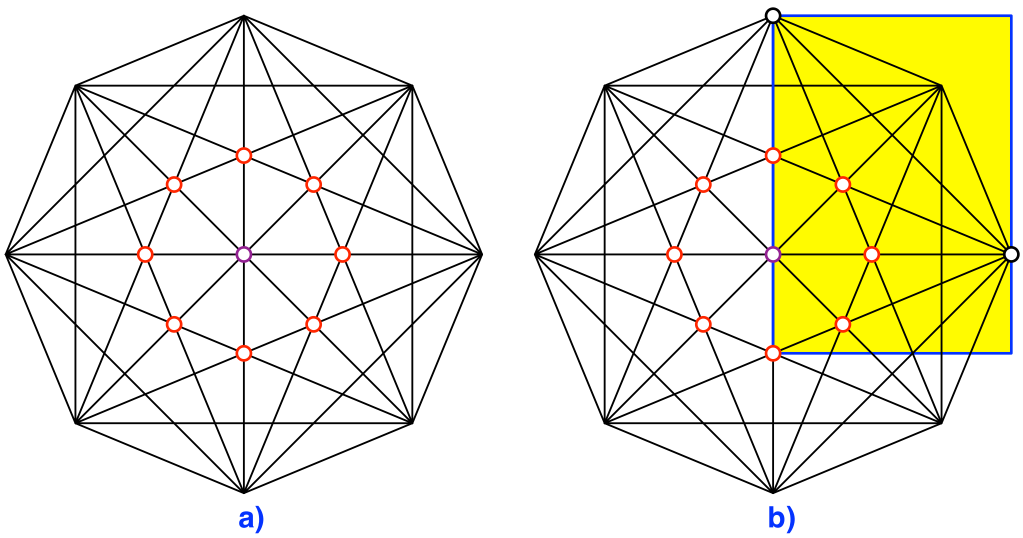


Abb. 6: Im Achteck

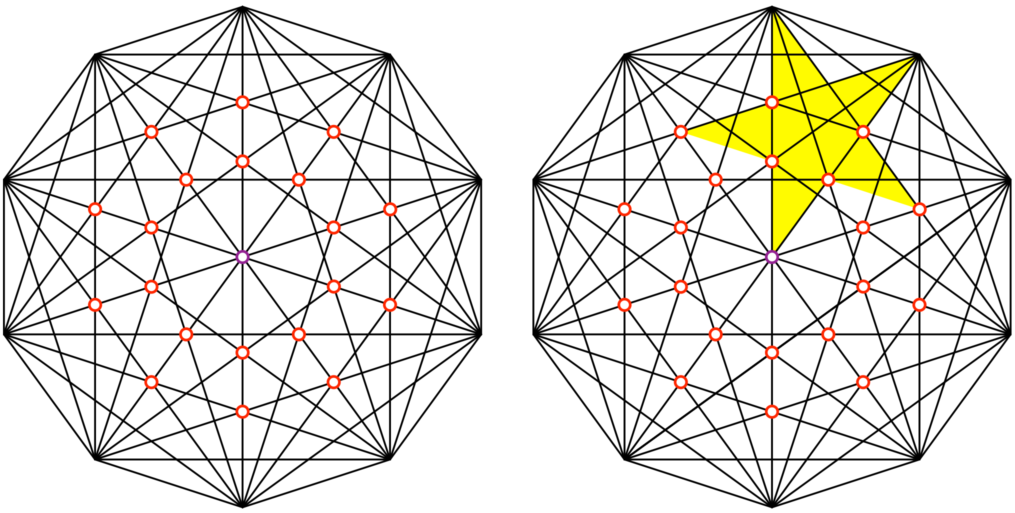
Diese Schnittpunkte haben vom Mittelpunkt den Abstand:

$$\tan(22.5°) = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142 \tag{1}$$

Diese Längen erscheinen in der Geometrie des DIN-Formates (Walser 2013b). Wir können ein Rechteck im DIN-Format einpassen (Abb. 6b).

4.2.2 Regelmäßiges Zehneck

Im regelmäßigen Zehneck gibt es ebenfalls Schnittpunkte dritten Grades (Abb. 7a). Die Schnittpunkteigenschaft ist aus Symmetriegründen klar.



a) b)

Abb. 7: Im Zehneck

Die zehn Schnittpunkte des inneren Kranzes haben vom Mittelpunkt den Abstand:

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi^2} \approx 0.382 \tag{2}$$

Dabei bezeichnen wir mit

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \tag{3}$$

den so genannten *Goldenen Schnitt* (Walser 2013a, S. 16).

Die Schnittpunkte des äußeren Kranzes haben vom Mittelpunkt den Abstand:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi} \approx 0.618 \tag{4}$$

Die Punkte teilen also die Radiusstrecke im Verhältnis des Goldenen Schnittes. Wer hätte das gedacht! Wir können also ein Pentagramm einpassen (Abb. 7b).

4.2.3 Regelmäßiges Zwölfeck

Im regelmäßigen Zwölfeck wird es spannend (Abb. 8).

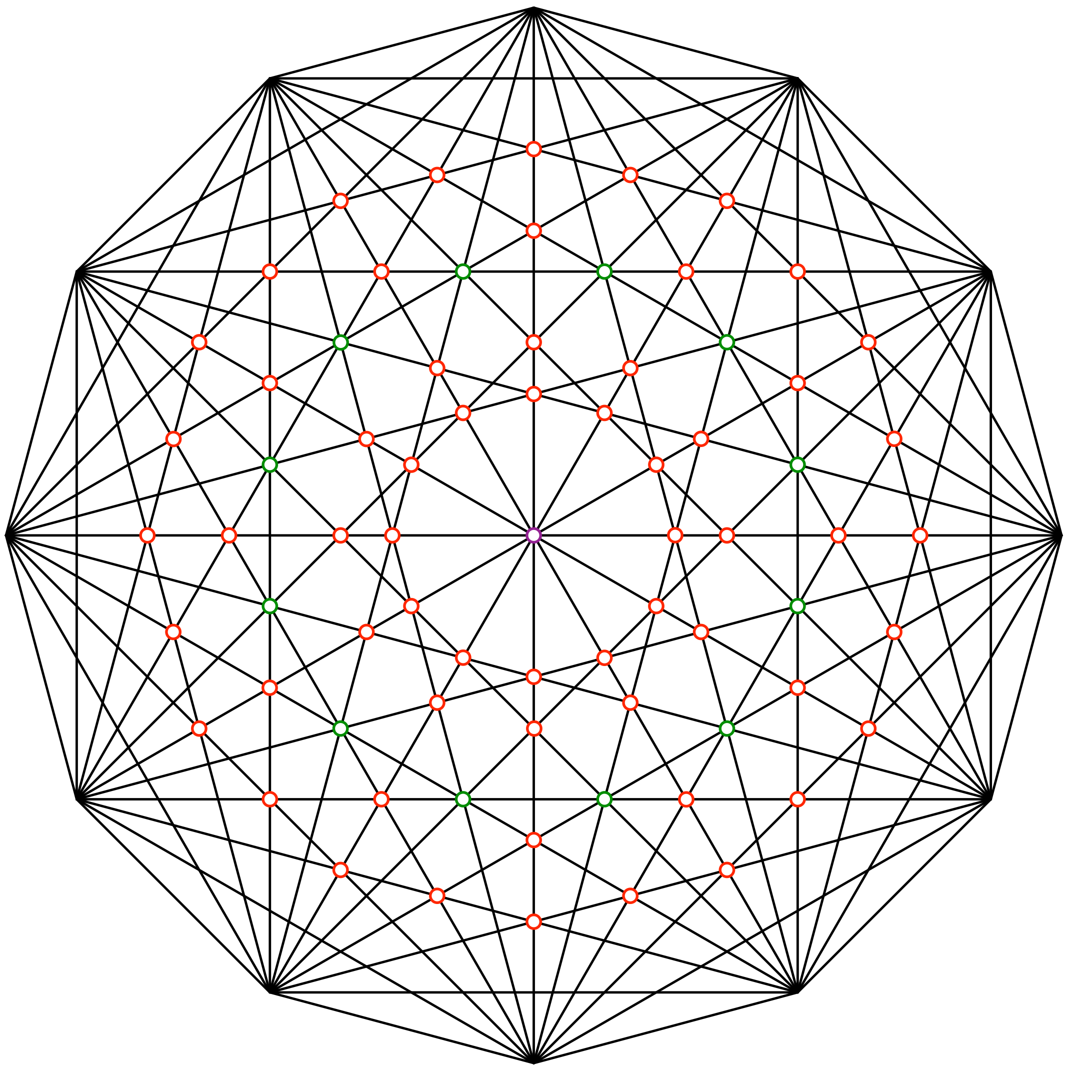


Abb. 8: Im regelmäßigen Zwölfeck

Wir haben insgesamt fünf Kränze von Schnittpunkten dritten Grades (rot) und einen Kranz von Schnittpunkten vierten Grades (grün). Wir besprechen das im Einzelnen.

Der innerste Kranz von roten Punkten hat vom Mittelpunkt einen Abstand:

$$\tan(15°) = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268 \tag{5}$$

Der zweitinnerste Kranz roter Punkte hat vom Mittelpunkt den Abstand:

$$\tfrac{1}{3}\left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 0.366 \tag{6}$$

Der dritte Kranz roter Punkte hat den Radius:

$$\tan\left(30°\right) = \tfrac{1}{2\cos\left(30°\right)} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \approx 0.577 \tag{7}$$

4.2.3.1 Nichttriviale rote Schnittpunkte

Der vierte Kranz roter Punkte hat den Radius:

$$\cos\left(45°\right) = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \approx 0.707 \tag{8}$$

Die Schnittpunkteigenschaft der roten Punkte des vierten Kranzes ist nicht trivial, da keine Mittelpunktdiagonale beteiligt ist. Um die Schnittpunkteigenschaft einzusehen, betten wir das Zwölfeck in einen Quadratraster ein (Abb. 9).

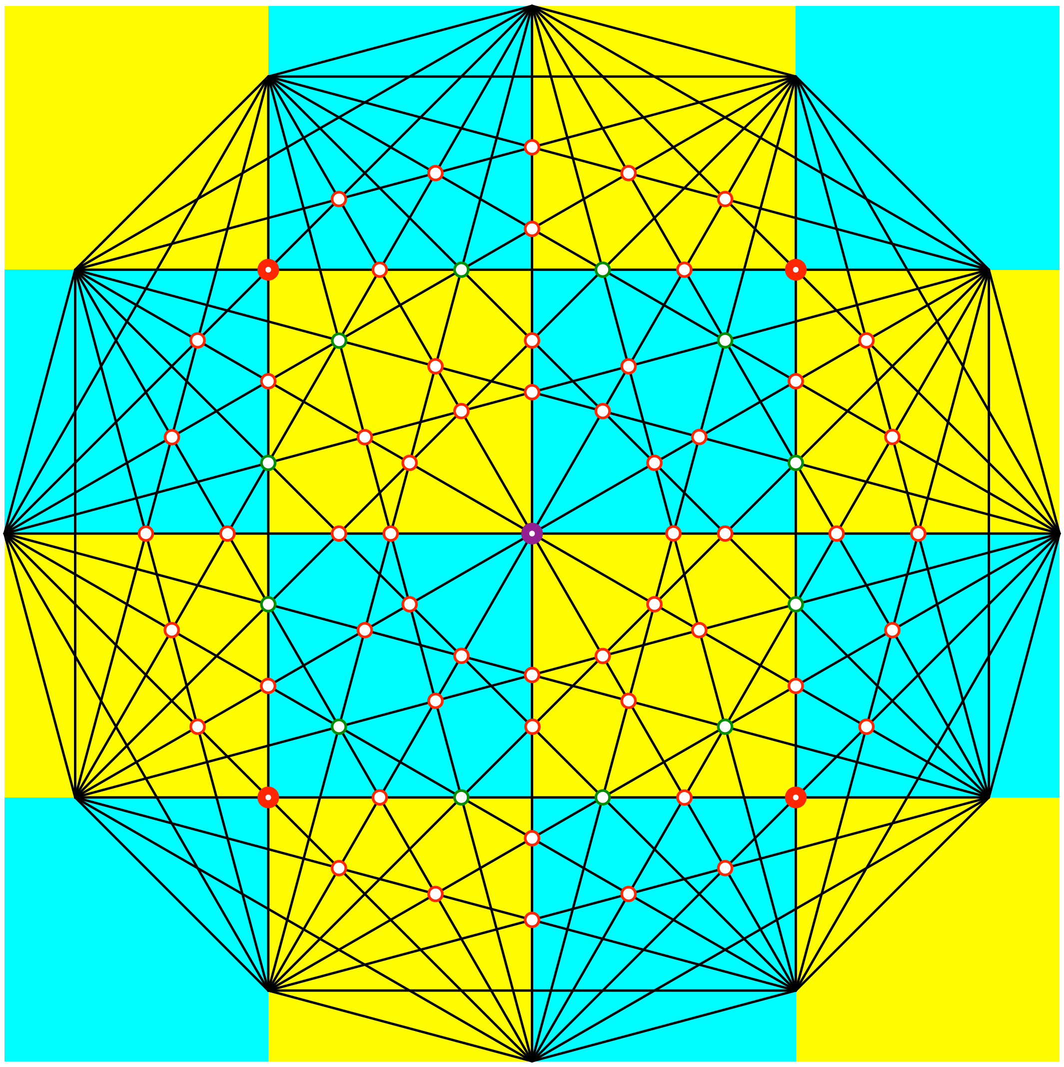


Abb. 9: Im Quadratraster

Die an den fetten roten Punkten, welche zum vierten Kranz gehören, beteiligten Zwölfeckdiagonalen sind Rasterlinien oder Diagonallinien des Rasters. Damit ist die Schnittpunkteigenschaft nachgewiesen. Zugleich wir klar, warum beim Abstand vom Mittelpunkt die Quadratwurzel aus 2 erscheint.

Wer der Raster-Einbettung nicht traut, kann im gelb markierten Dreieck der Abbildung 10 die Winkel-Version des Satzes von Ceva (Walser 2012, S. 145f) anwenden. Da der Fächerwinkel (Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Diagonalen) im regelmäßigen 12-Eck 15° beträgt, können die benötigten Winkel leicht abgezählt werden.

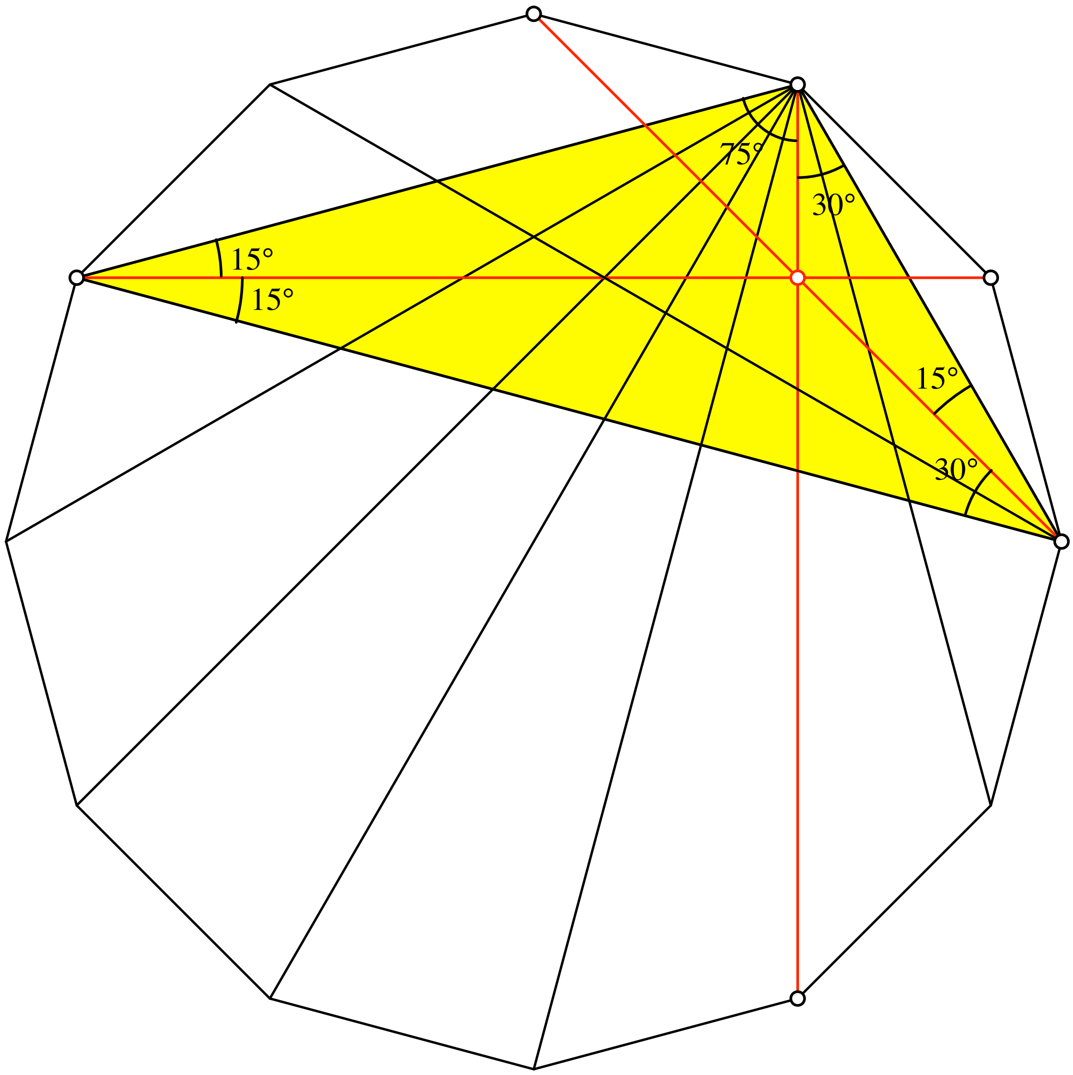


Abb. 10: Anwendung des Satzes von Ceva

Zu zeigen ist:

$$\frac{\sin(15°)}{\sin(15°)}\frac{\sin(30°)}{\sin(15°)}\frac{\sin(30°)}{\sin(75°)}\overset{?}{=}1 \tag{9}$$

Bearbeitung der linken Seite:

$$\frac{\sin(15°)}{\sin(15°)}\frac{\sin(30°)}{\sin(15°)}\frac{\sin(30°)}{\sin(75°)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2\sin(15°)\cos(15°)}{\sin(15°)\sin(75°)}=\frac{\cos(15°)}{\cos(15°)}=1 \tag{10}$$

Der fünfte und äußerste Kranz roter Punkte hat den Radius:

$$\sqrt{3}-1 \approx 0.732 \tag{11}$$

Die Werte von (5) und (9) ergänzen sich auf 1.

4.2.3.2 Grüne Schnittpunkte

Der Kranz der Schnittpunkte vierten Grades (grün) hat den Radius:

$$\frac{1}{2\cos(15^\circ)} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 0.518 \tag{12}$$

Die Schnittpunkteigenschaft der grünen Punkte ist nicht trivial. Sie kann durch Einpassen eines Sterns in die Figur eingesehen werden (Abb. 11).

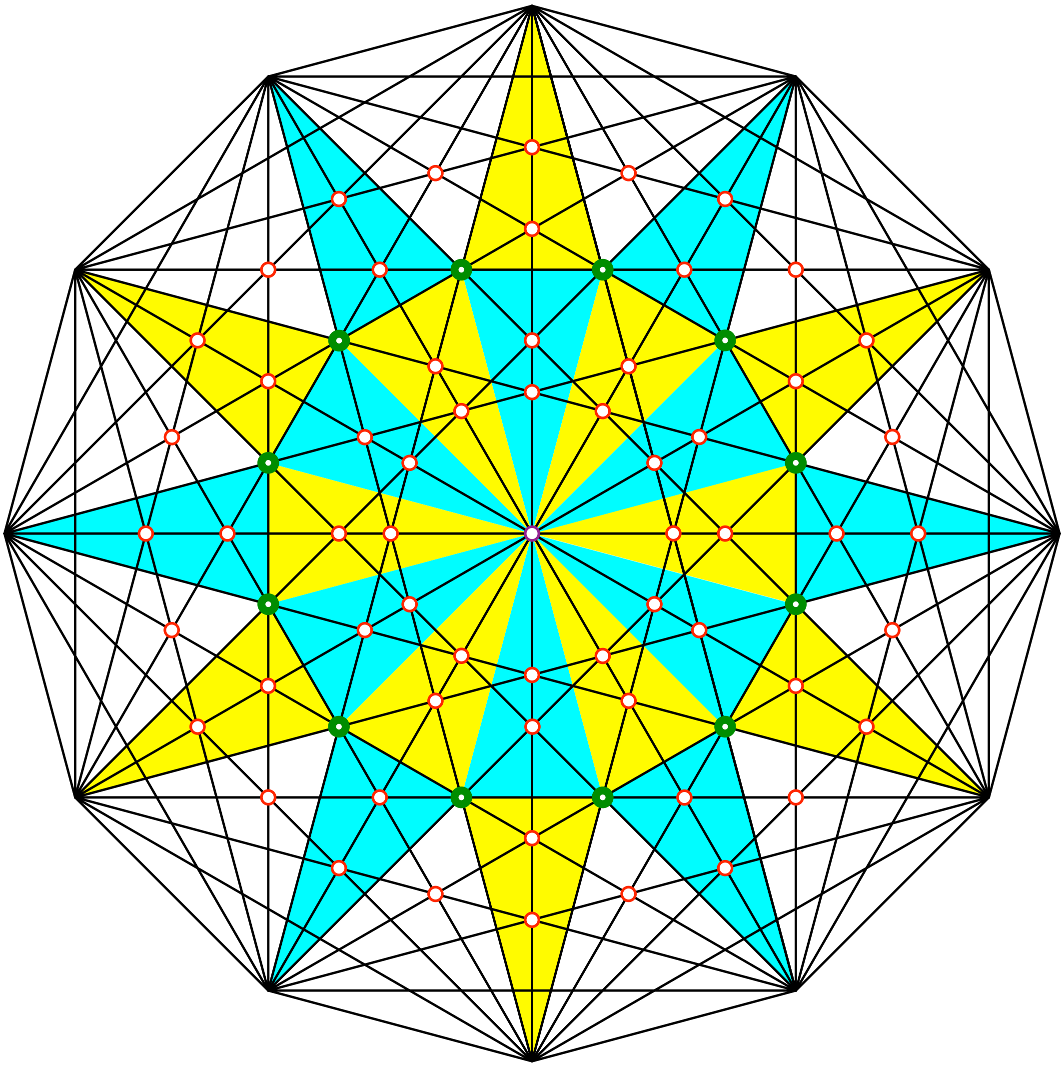


Abb. 11: Einpassen eines Sterns

Wer der Sache mit dem Stern nicht traut, kann wie folgt argumentieren. Die vier am Schnittpunkt beteiligten Diagonalen bilden eine symmetrische Figur. Die Symmetrieachse ist allerdings keine Diagonale, aber eine Symmetrieachse des regelmäßigen Zwölfecks. Aus Symmetriegründen können wir daher für den Beweis der Schnittpunkteigenschaft eine der vier Diagonalen weglassen (hellgrün in Abb. 12). Die verbleibenden drei Diagonalen sind im gelb markierten Dreieck die Winkelhalbierenden.

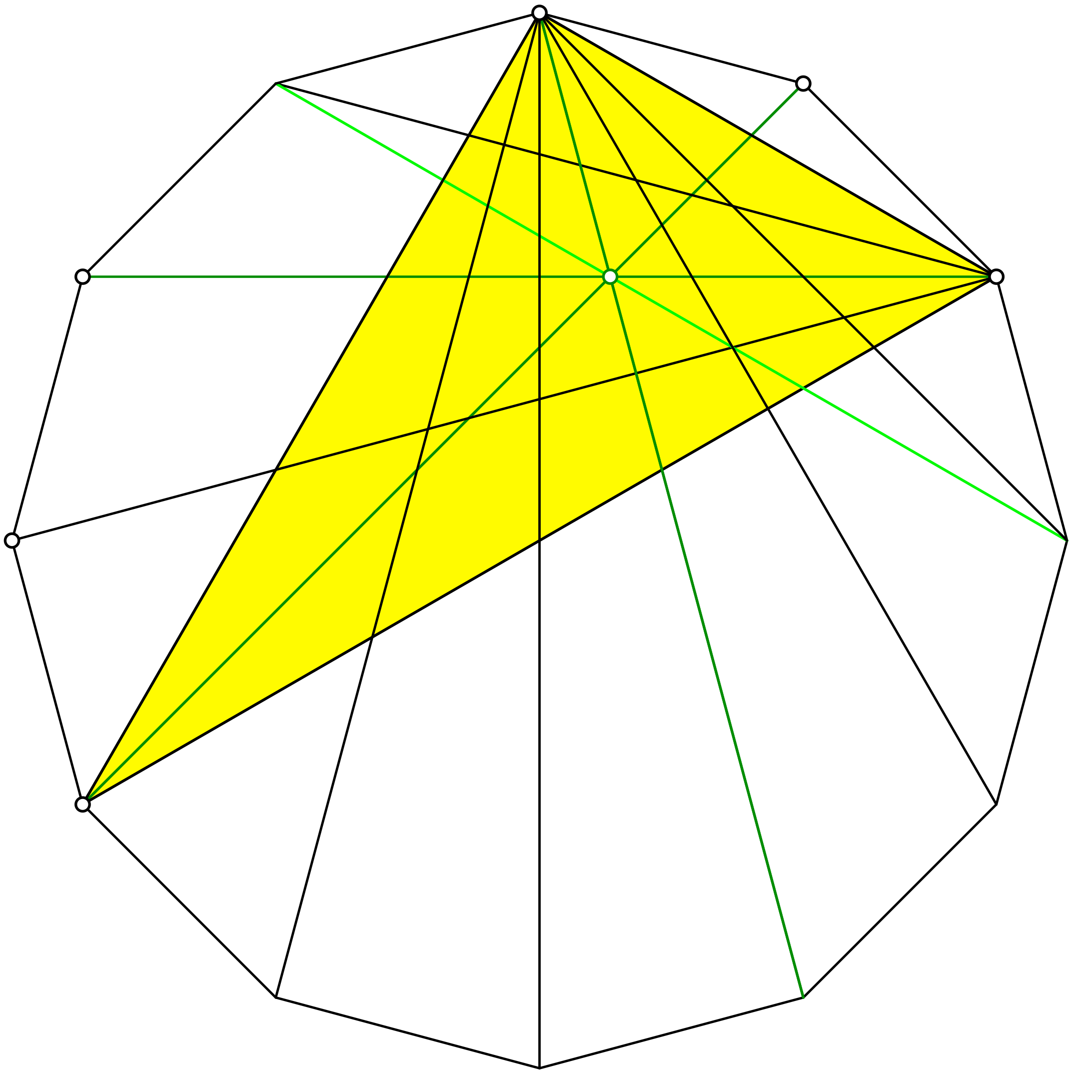


Abb. 12: Winkelhalbierende

4.2.4 Regelmäßiges 14-Eck

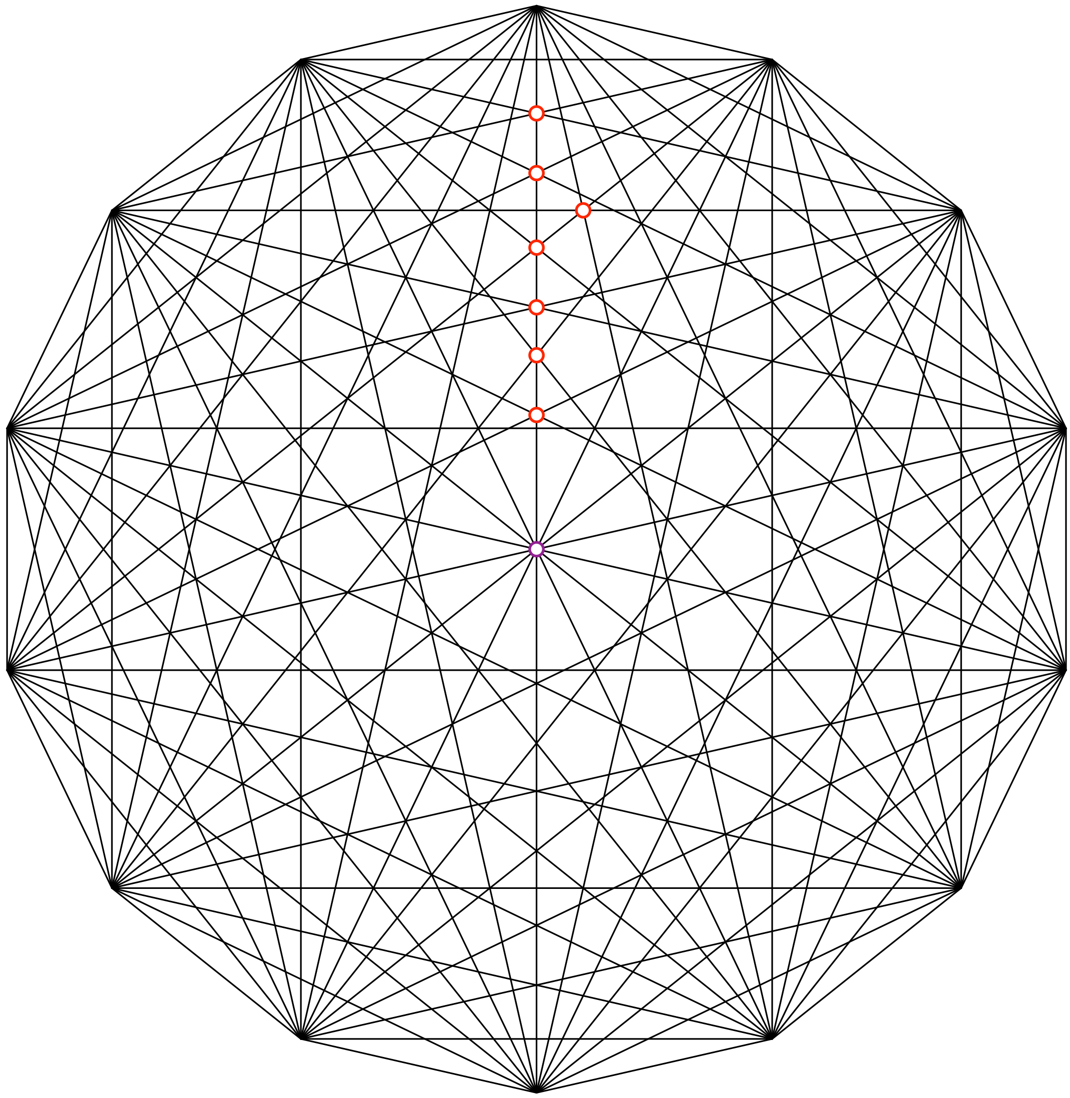


Abb. 13: Regelmäßiges 14-Eck

Im 14-Eck hat es nur Schnittpunkte dritten Grades. In der Abbildung 13 ist für jeden Kranz ein Beispiel eingezeichnet. Der einzige nichttriviale Schnittpunkt ist derjenige neben der Mittelpunktdiagonale. Der geneigte Leser ist eingeladen, die Schnittpunkteigenschaft nachzuweisn (Tipp: Trigonometrie).

4.2.5 Regelmäßiges 16-Eck

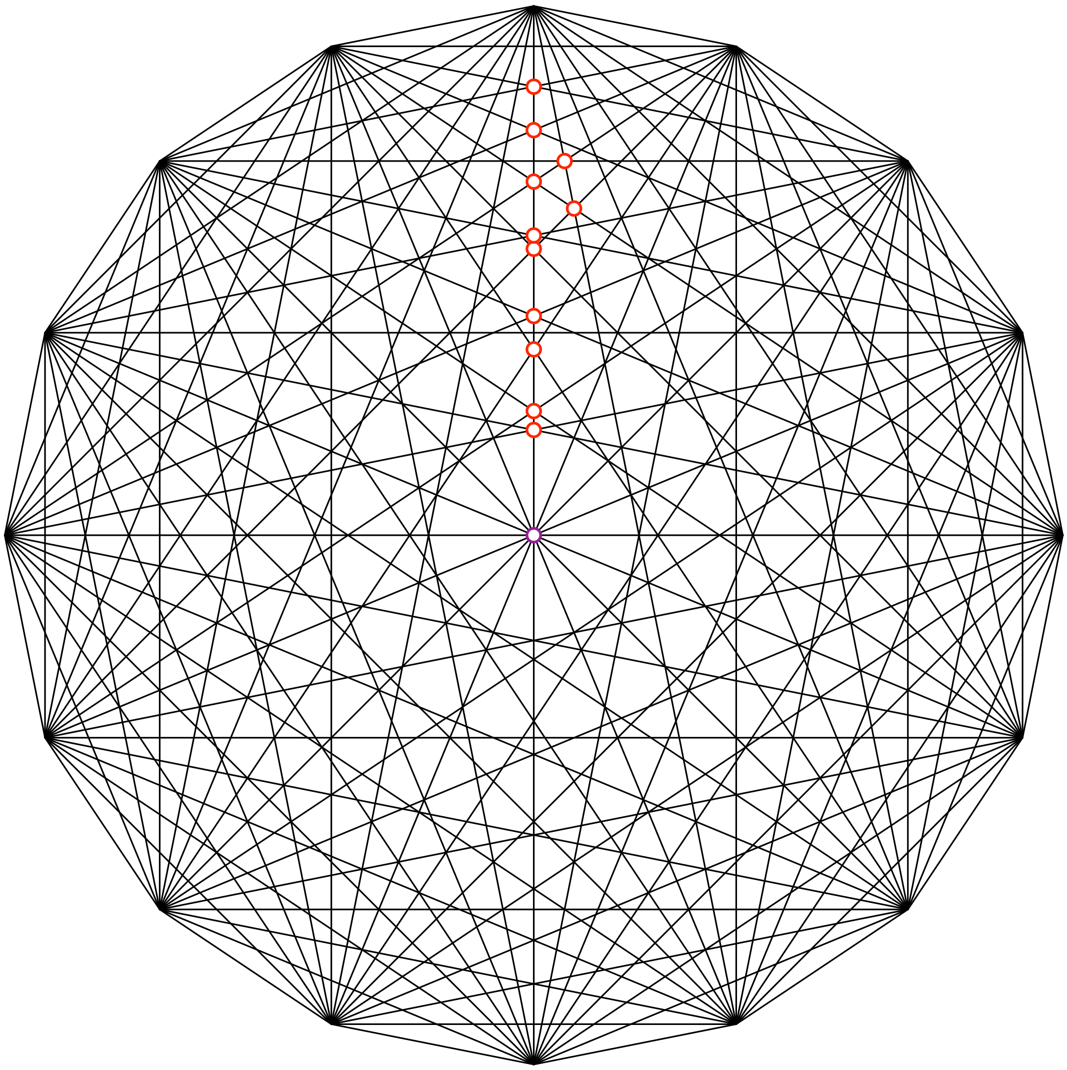


Abb. 14: Regelmäßiges 16-Eck

Nur Schnittpunkte dritten Grades, davon zwei nichttriviale.

4.2.6 Regelmäßiges 18-Eck

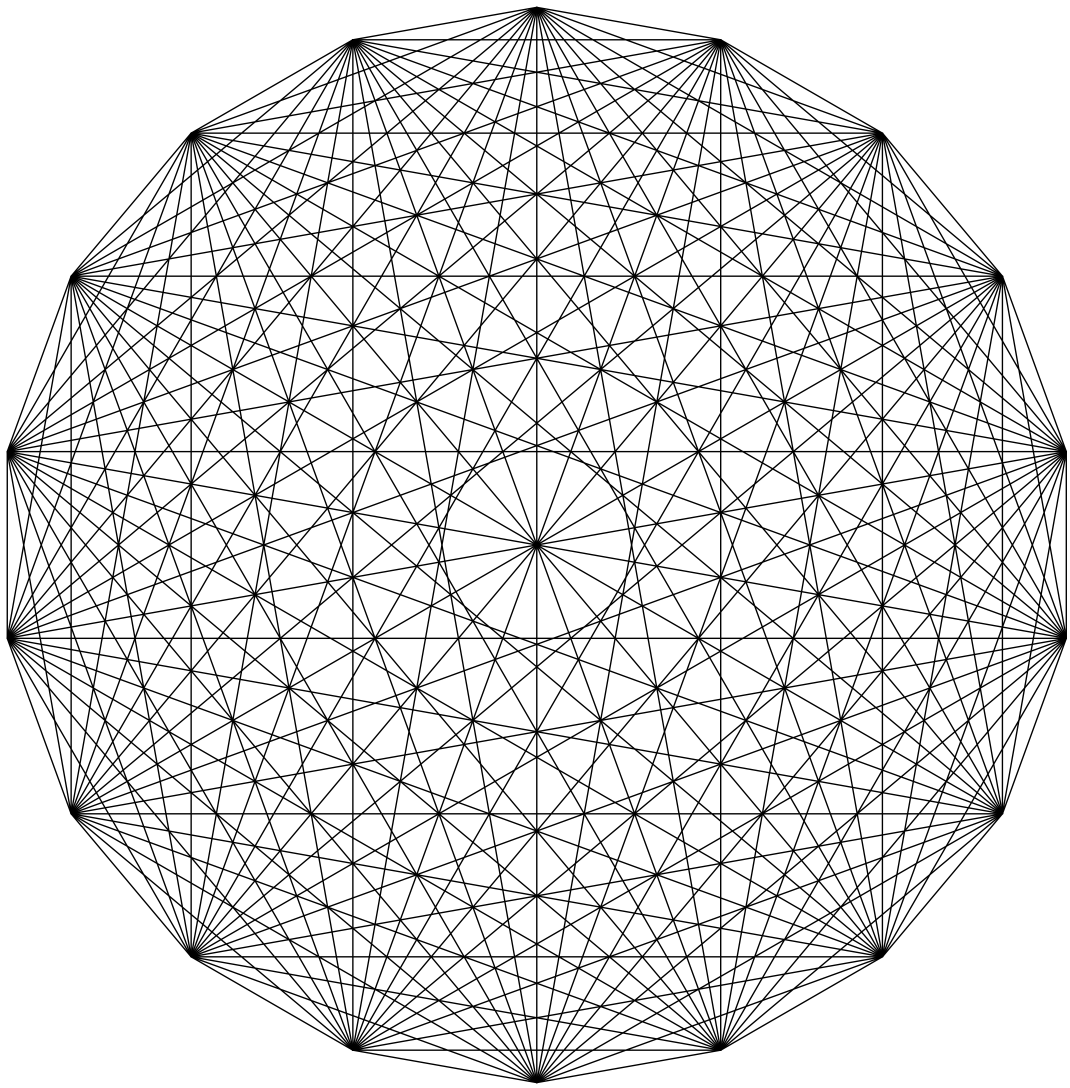


Abb. 15: Sternenhimmel

Im regelmäßigen 18-Eck sehen wir Schnittpunkte dritten, vierten und fünften Grades (Abb. 15 und 16).

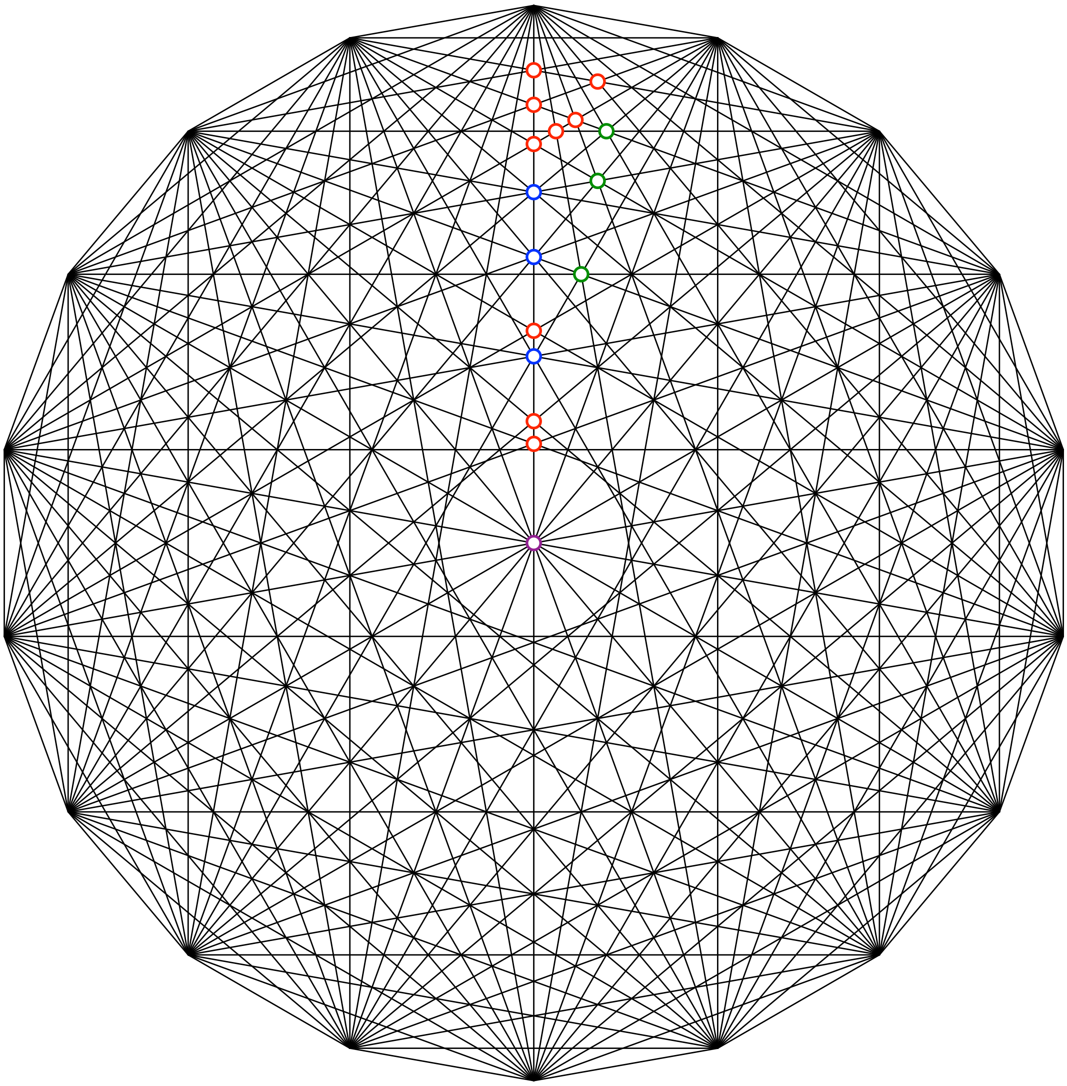


Abb. 16: Exemplarische Auswahl von Schnittpunkten

Die nichttrivialen Schnittpunkte dritten Grades sowie sämtliche Schnittpunkte vierten und fünften Grades sind zu beweisen. Exemplarisch einige Beweise.

4.2.6.1 Ein nichttrivialer roter Schnittpunkt

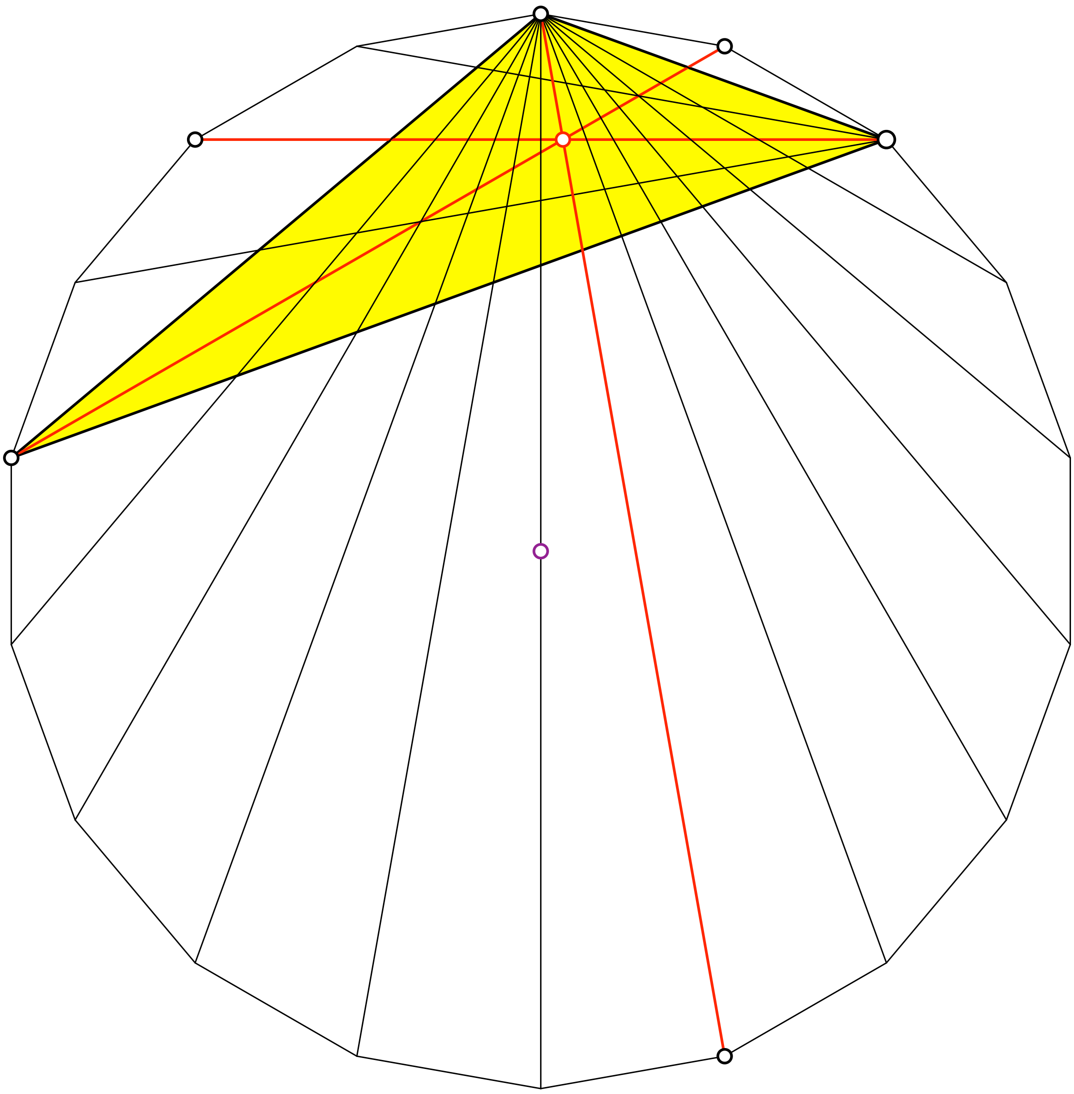


Abb. 17: Nichttrivialer roter Schnittpunkt

Der nichttriviale rote Schnittpunkt in der Abbildung 17 ist Winkelhalbierendenschnittpunkt im gelb markierten Dreieck.

4.2.6.2 Ein grüner Schnittpunkt

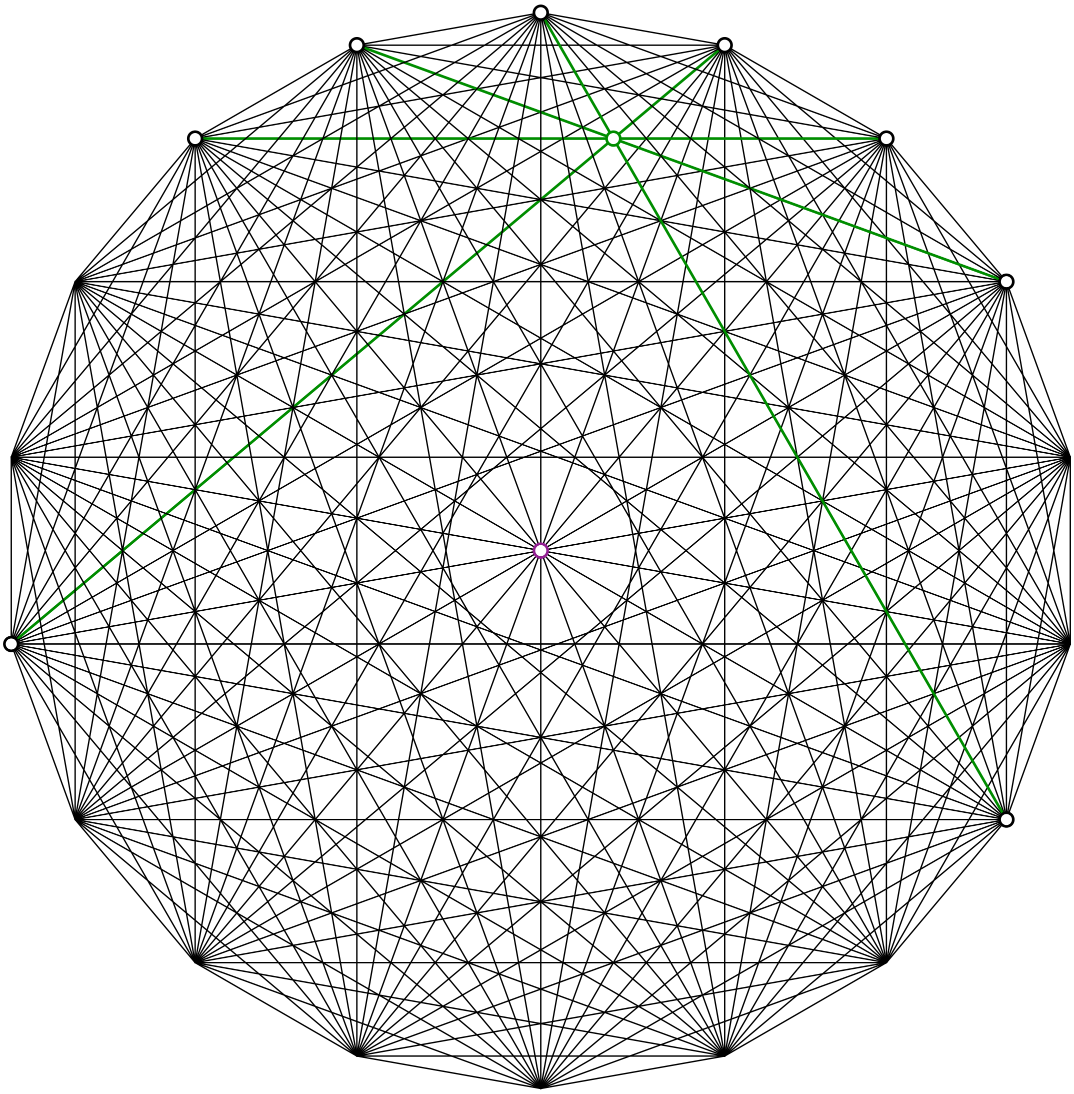


Abb. 18: Grüner Schnittpunkt vierten Grades

Due vier am Schnittpunkt vierten Grades (Abb. 18) beteiligten Diagonalen bilden eine symmetrische Figur. Die Symmetrieachse ist keine Diagonale, aber eine Symmetrieachse des 18-Ecks. Aus Symmetriegründen können wir daher eine der vier Diagonalen weglassen. Wir lassen die waagerechte Diagonale weg (Abb. 19).

Für den Beweis der Schnittpunkteigenschft der drei verbleibenden Diagonalen arbeiten wir im gelb markierten Dreieck mit der Winkel-Version des Satzes von Ceva (Walser 2012, S. 145f).

Da im regelmäßigen 18-Eck der Fächerwinkel (Winkel zwischen zwei benachbarten Diagonalen) 10° misst, können wir die benötigten Winkel leicht ablesen.

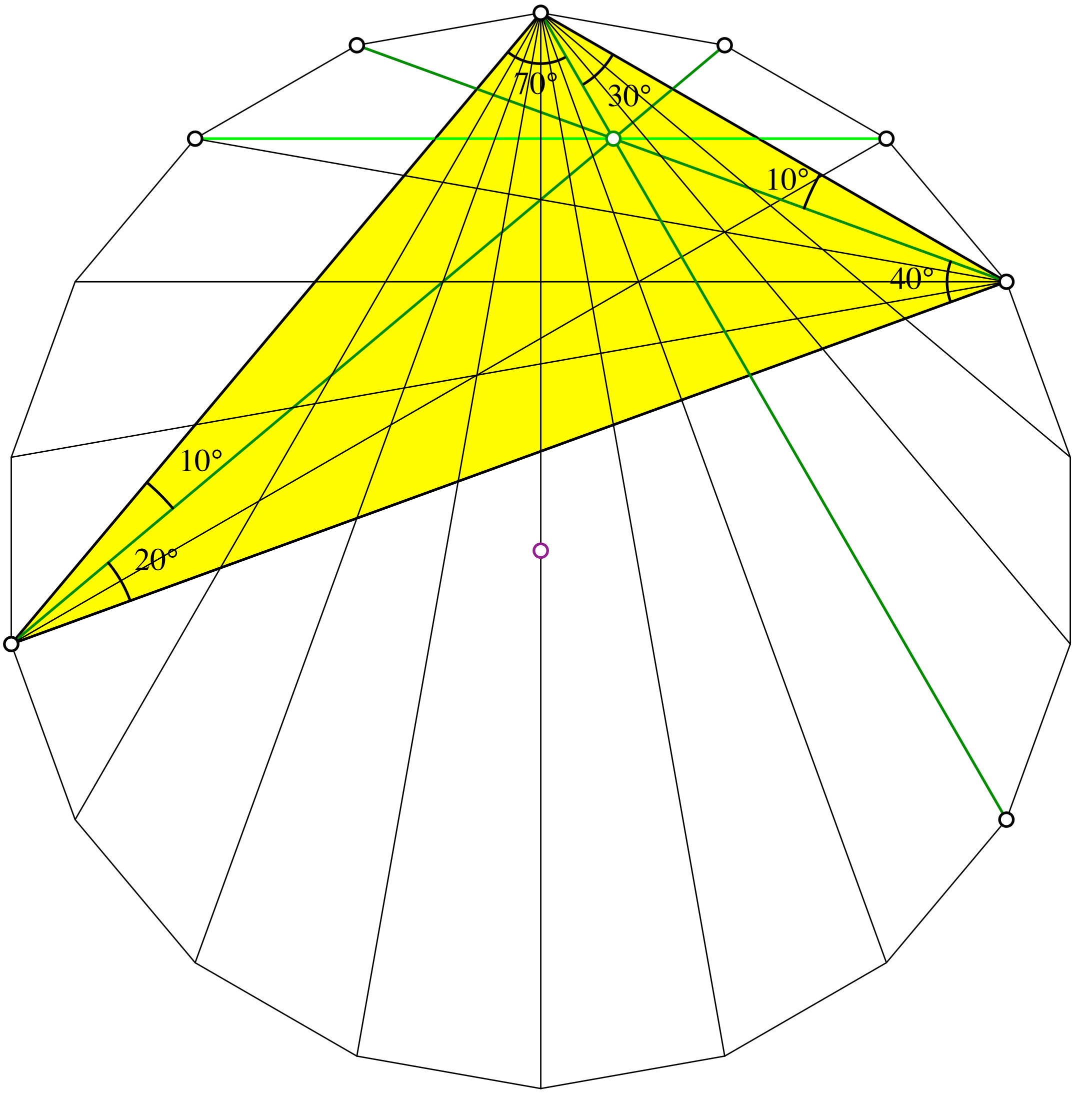


Abb. 19: Beweisfigur

Zu zeigen ist:

$$\frac{\sin(70°)}{\sin(30°)}\frac{\sin(20°)}{\sin(10°)}\frac{\sin(10°)}{\sin(40°)}\overset{?}{=}1 \tag{13}$$

Umformung der linken Seite gibt:

$$\frac{\sin(70°)}{\sin(30°)}\frac{\sin(20°)}{\sin(10°)}\frac{\sin(10°)}{\sin(40°)}=\frac{\sin(70°)\sin(20°)}{\frac{1}{2}\sin(40°)}=\frac{\sin(70°)\sin(20°)}{\sin(20°)\cos(20°)}=\frac{\sin(70°)}{\cos(20°)}=\frac{\sin(70°)}{\sin(70°)}=1 \tag{14}$$

Damit ist die Schnittpunkteigenschaft für den grünen Schnittpunkt vierten Grades bewiesen.

4.2.6.3 Ein blauer Schnittpunkt

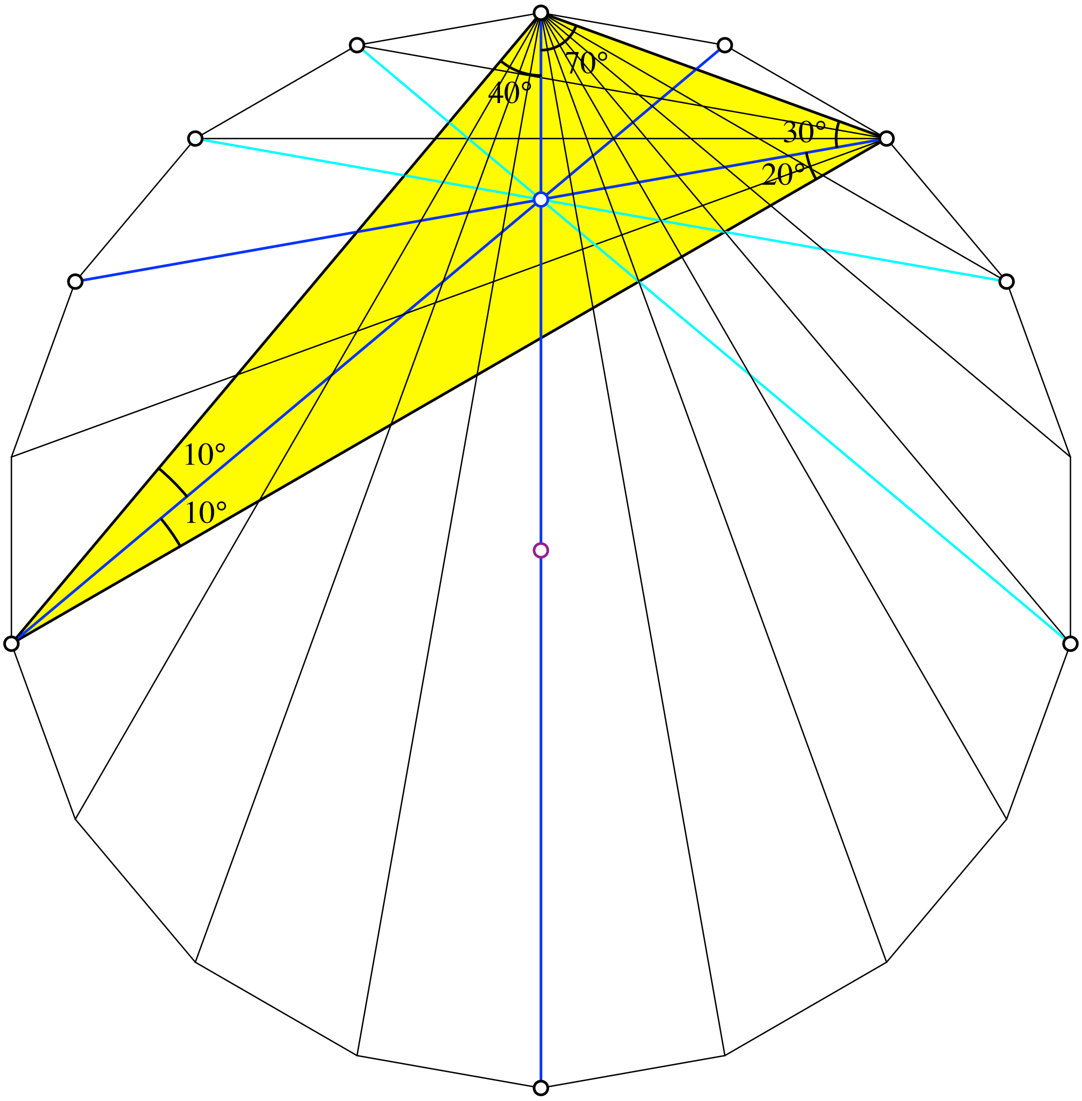


Abb. 20: Ein blauer Schnittpunkt

Die fünf an einem blauen Schnittpunkt beteiligten Diagonalen bilden eine symmetrische Figur mit einer Mittelpunktdiagonalen als Symmetrieachse. Aus Symmetriegründen können wir daher die beiden in der Abbildung 20 hellblau gezeichneten Diagonalen für die Überlegung weglassen.

Für die dunkelblau gezeichneten Diagonalen wenden wir wiederum die Winkel-Version des Satzes von Ceva an. Zu zeigen ist:

$$\frac{\sin(10°)}{\sin(10°)}\frac{\sin(20°)}{\sin(30°)}\frac{\sin(70°)}{\sin(40°)}\stackrel{?}{=}1 \qquad (15)$$

Dies ist identisch mit (13) und wurde in (14) nachgewiesen. Die beiden gelben Dreiecke der Abbildungen 19 und 20 sind aber nicht kongruent oder ähnlich, da die Teilwinkel ungleich angeordnet sind.

4.2.6.4 Problemlösen

Das regelmäßige 18-Eck ist ein beliebtes Tummelfeld für Problemlöseaufgaben. Das 18-Eck tritt dabei nicht explizit auf, ist aber der Schlüssel zur Lösung. Der vermeintliche Schwierigkeitsgrad liegt darin, dass das regelmäßige 18-Eck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist und daher einen gewissen Tabucharakter hat. Beispiele dazu.

Literatur

Walser, Hans (2012): 99 Schnittpunkte. Beispiele – Bilder – Beweise. 2. Auflage. EAGLE, Edition am Gutenbergplatz: Leipzig. ISBN 978-3-937219-95-0.

Walser, Hans (2013a): Der Goldene Schnitt. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.

Walser, Hans (2013b): DIN A4 in Raum und Zeit. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2013. ISBN 978-3-937219-69-1.

Websites

Hans Walser: 18-Eck (23.04.2017):

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/1/18-Eck/18-Eck.htm