Hans Walser, [20220903]

Diagonalen im Hyperwürfel

1 Worum geht es?

Wie viele Diagonalen, sortiert nach Länge, gibt es im n-dimensionalen Hyperwürfel?

Anklänge an das Pascalsche Zahlendreieck der Binomialkoeffizienten

Schöne Bildchen

2 Quadrat

Das Quadrat hat vier Ecken, vier Kanten (Seiten) der Länge 1 und zwei Diagonalen der Länge $\sqrt{2}$ (Abb. 1).

Liste: 4, 4, 2

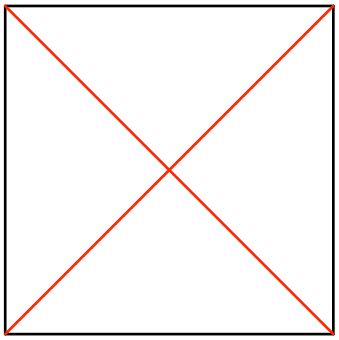

Abb. 1: Quadrat

3 Würfel

Der Würfel hat acht Ecken, zwölf Kanten der Länge 1, zwölf Seitenflächendiagonalen der Länge √2 und vier Raumdiagonalen der Länge √3 (Abb. 2).

Liste: 8, 12, 12, 4

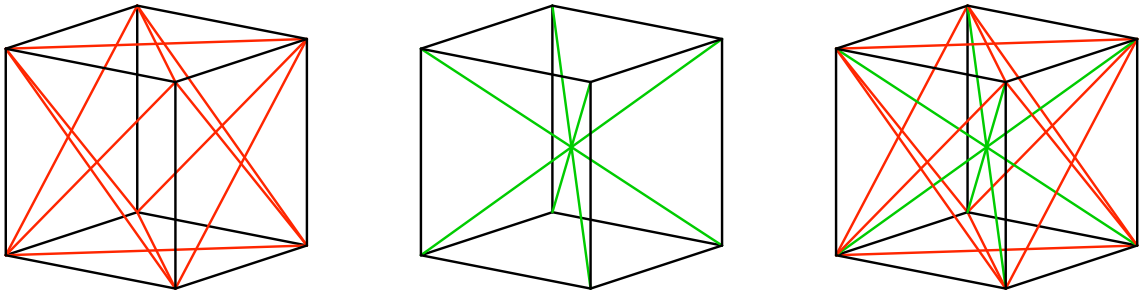

Abb. 2: Würfel

Die Abbildung 3 zeigt den Würfel mit den Diagonalen in isometrischer Darstellung. Dabei werden alle Würfelkanten gleich verkürzt dargestellt. Allerdings ist die Verkürzung bei den verschiedenen Diagonalen ungleich. Zudem stimmen in der Abbildung 3 die vorne-hinten-Relationen nicht. Dies ist technisch durch den Zeichenalgorithmus bedingt.

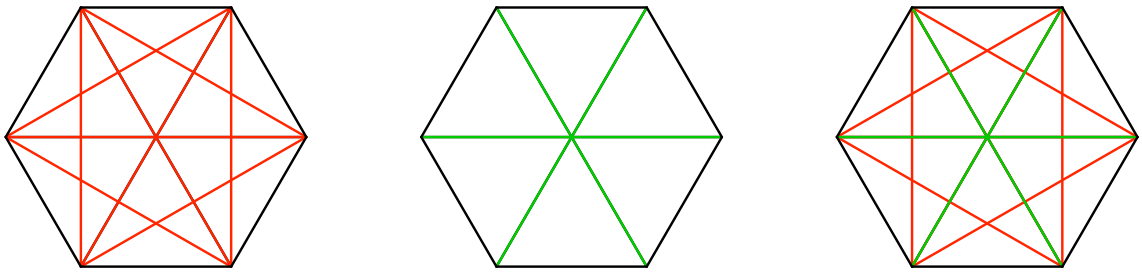

Abb. 3: Isometrische Darstellung

Wir werden faute de mieux für die Hyperwürfel ebenfalls die isometrische Darstellung verwenden.

4 Vierdimensionaler Hyperwürfel

Der vierdimensionale Hyperwürfel (Abb. 4.1) hat 16 Ecken und 32 Kanten der Länge 1.

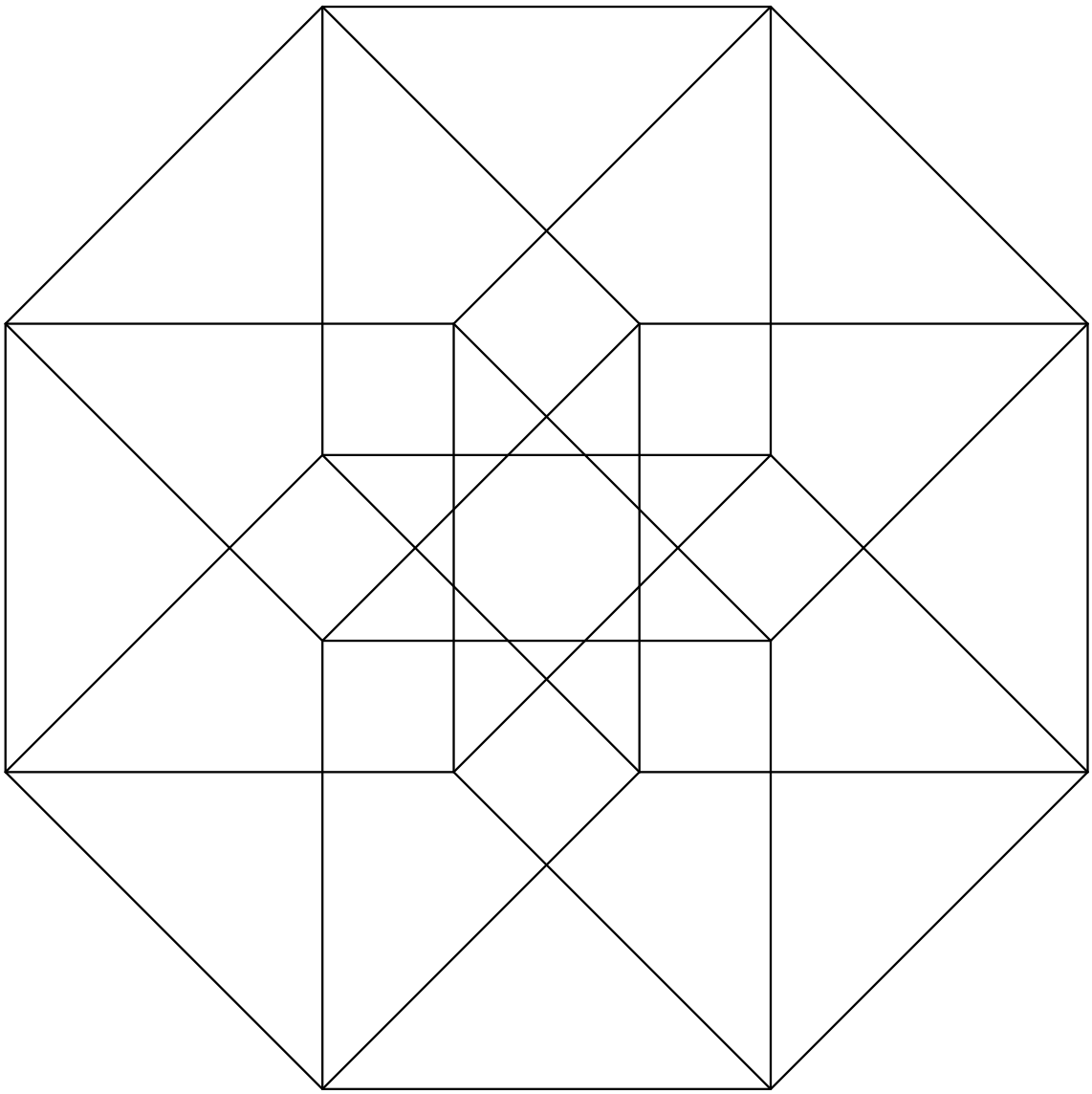

Abb. 4.1: Vierdimensionaler Hyperwürfel

Er hat 48 Diagonalen der Länge √2. In der Abbildung 4.2 überdecken sie sich teilweise.

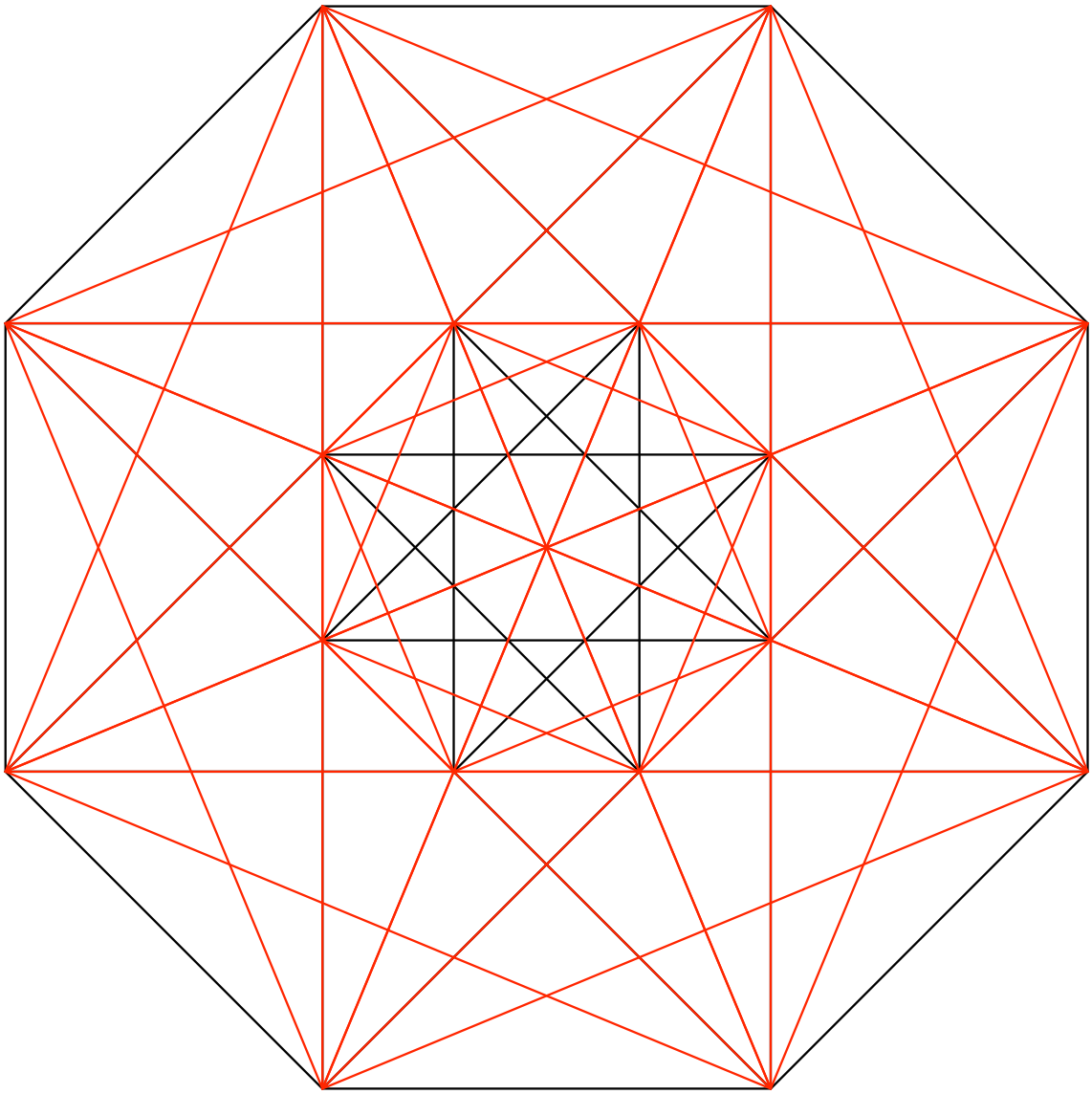

Abb. 4.2: 48 Diagonalen der Länge √2

Weiter gibt es 32 Diagonalen der Länge √3 (Abb. 4.3).

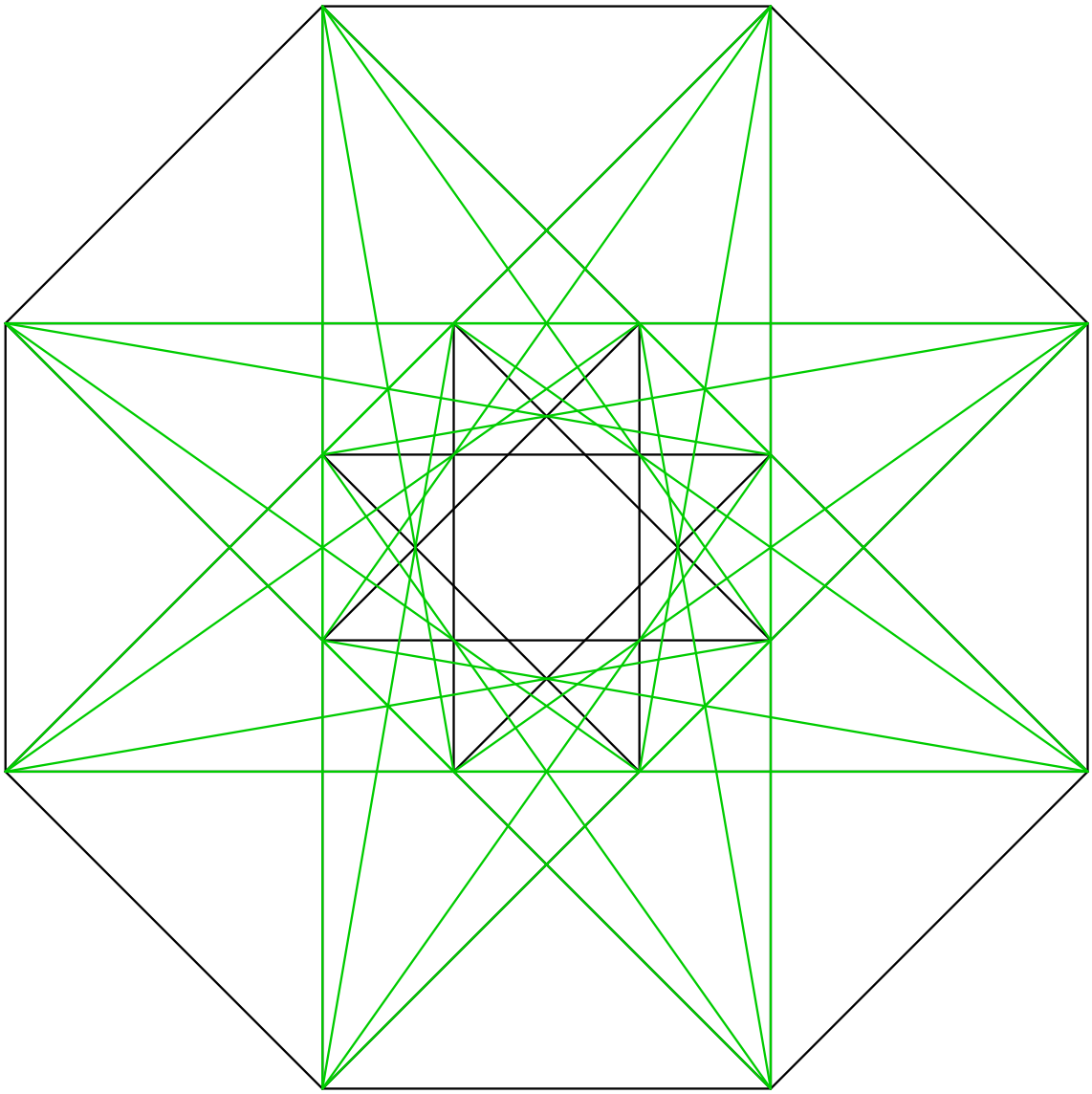

Abb. 4.3: 32 Diagonalen der Länge √3

Und schließlich 8 Diagonalen der Länge $\sqrt{4} = 2$ (Abb. 4.4).

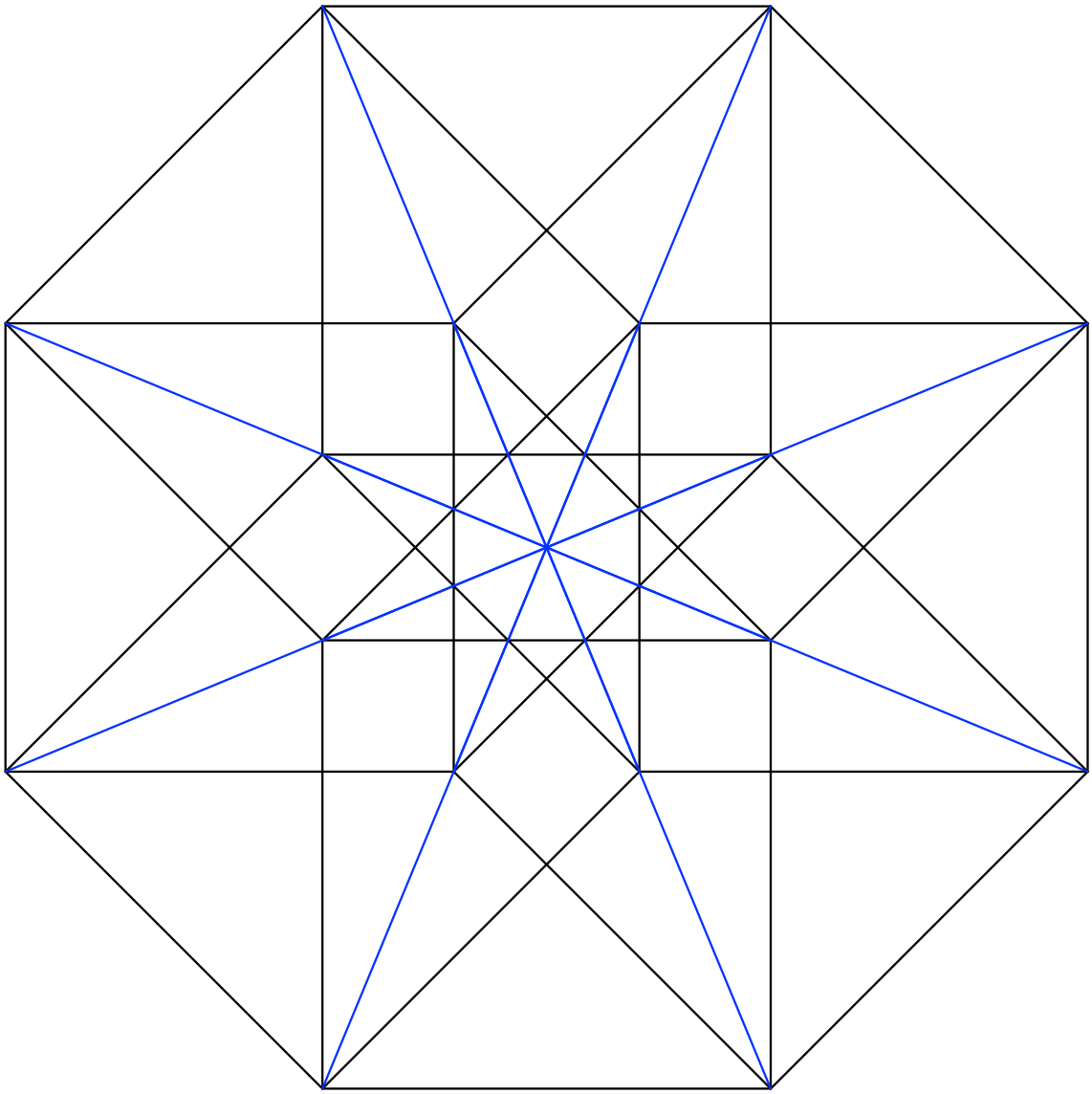

Abb. 4.4: 32 Diagonalen der Länge $\sqrt{4}$

Die Abbildung 4.5 zeigt, soweit nicht verdeckt, alle Diagonalen des vierdimensionalen Hyperwürfels.

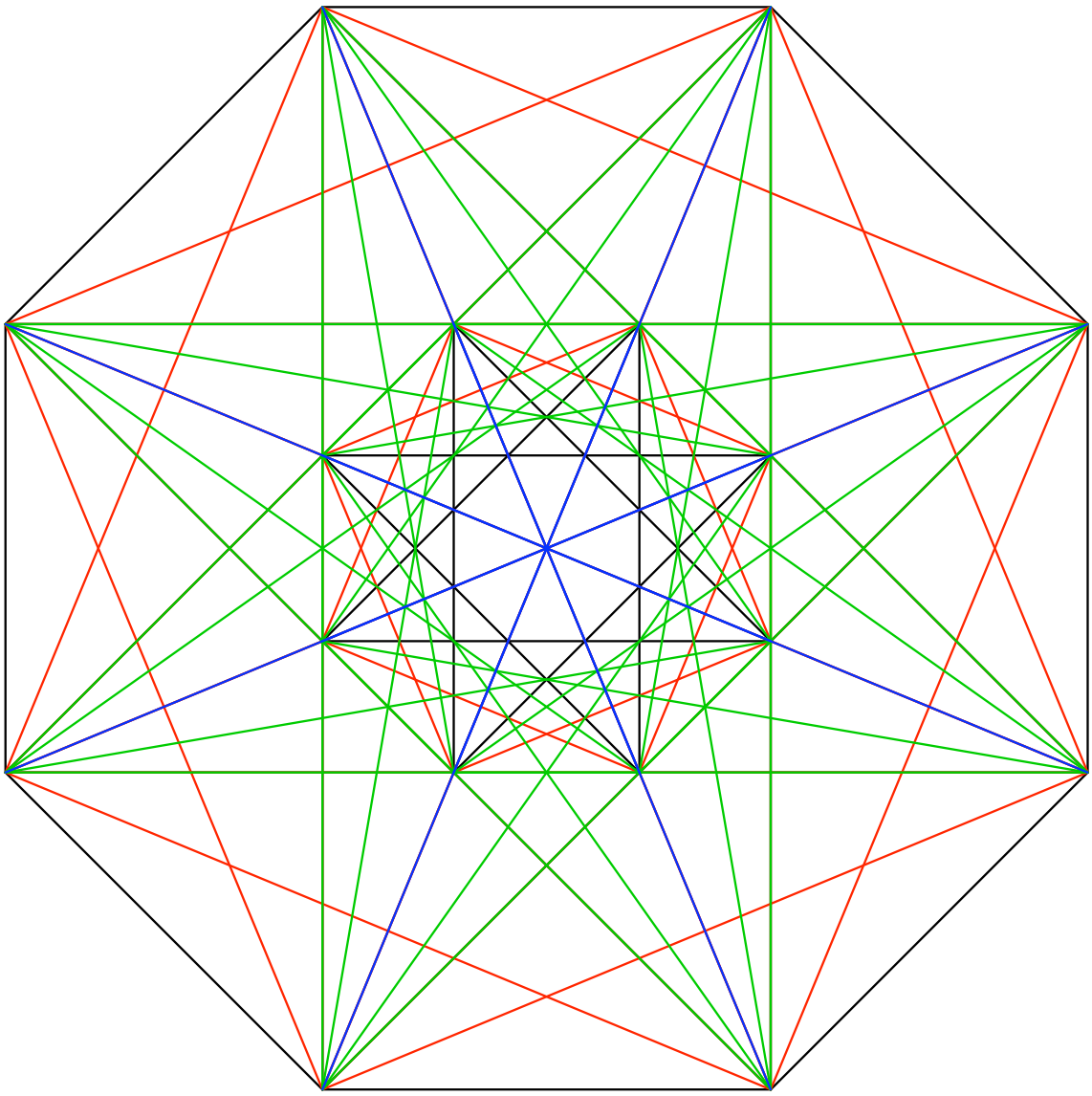

Abb. 4.5: Alle Diagonalen

Liste: 16, 32, 48, 32, 8

5 Dimension fünf

Die Abbildungen 5 zeigen das entsprechende Spielchen für den fünfdimensionalen Hyperwürfel.

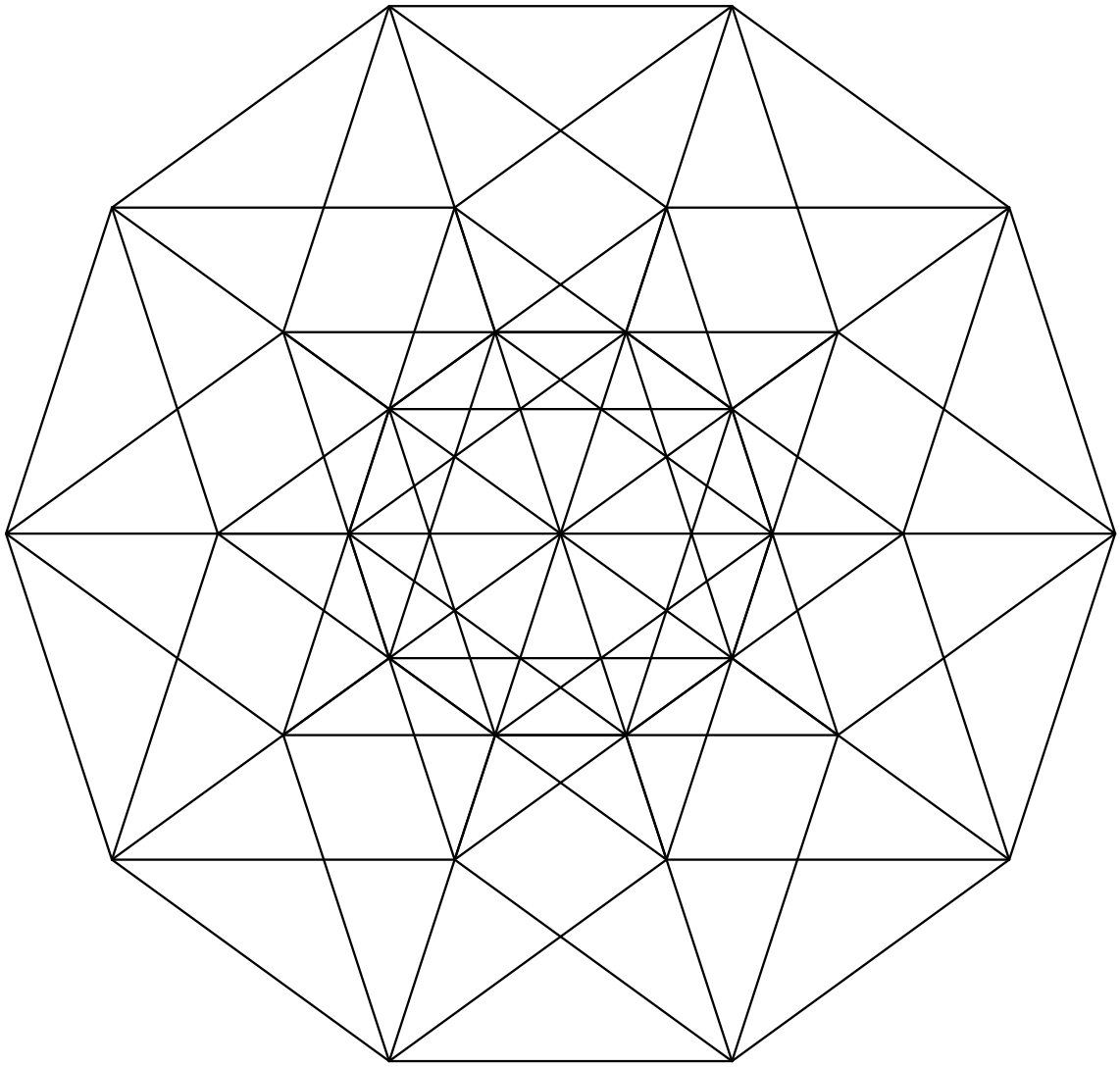

Abb. 5.1: Fünfdimensionaler Hyperwürfel mit 32 Ecken und 80 Kanten

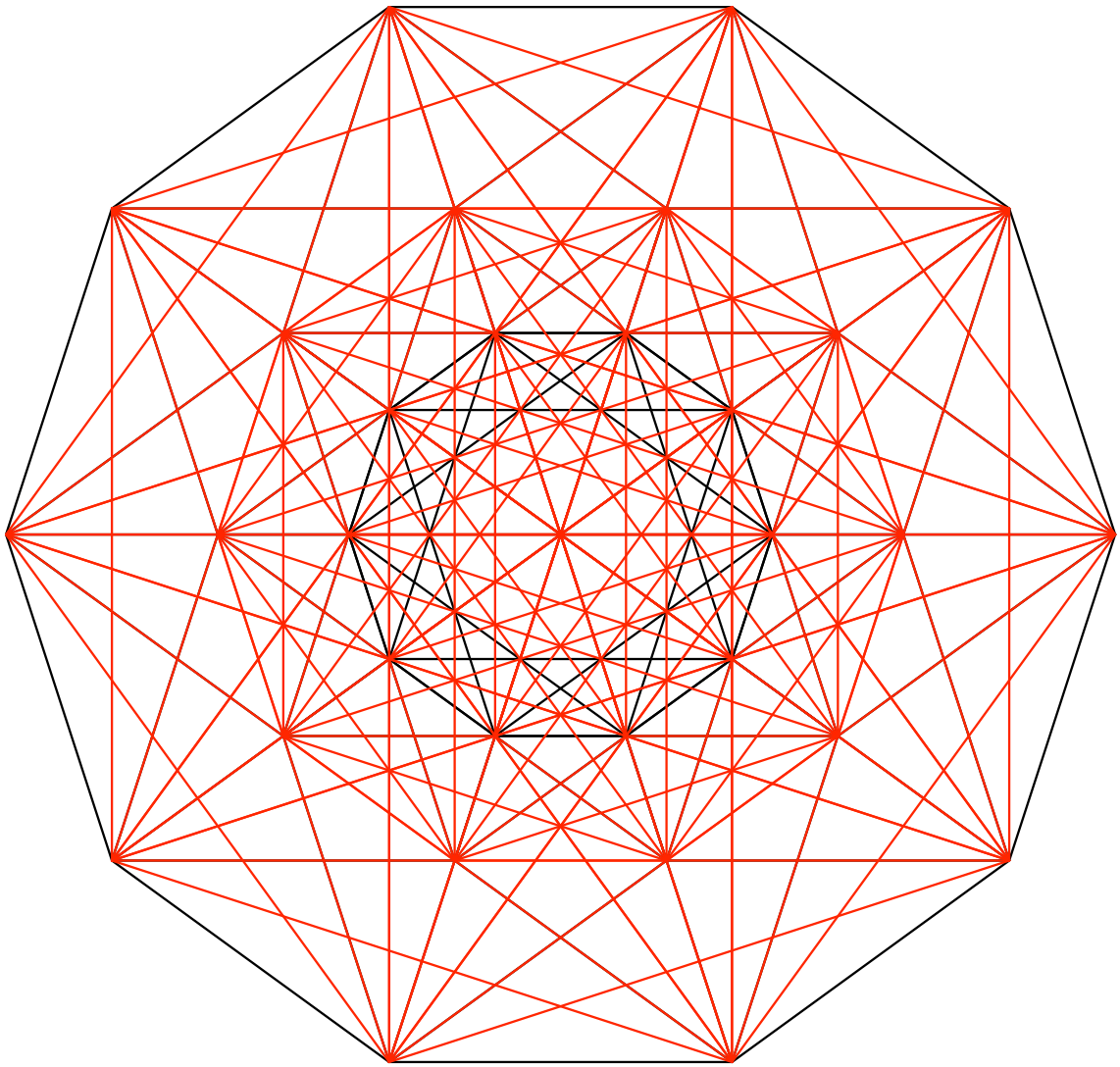

Abb. 5.2: 160 Diagonalen der Länge √2

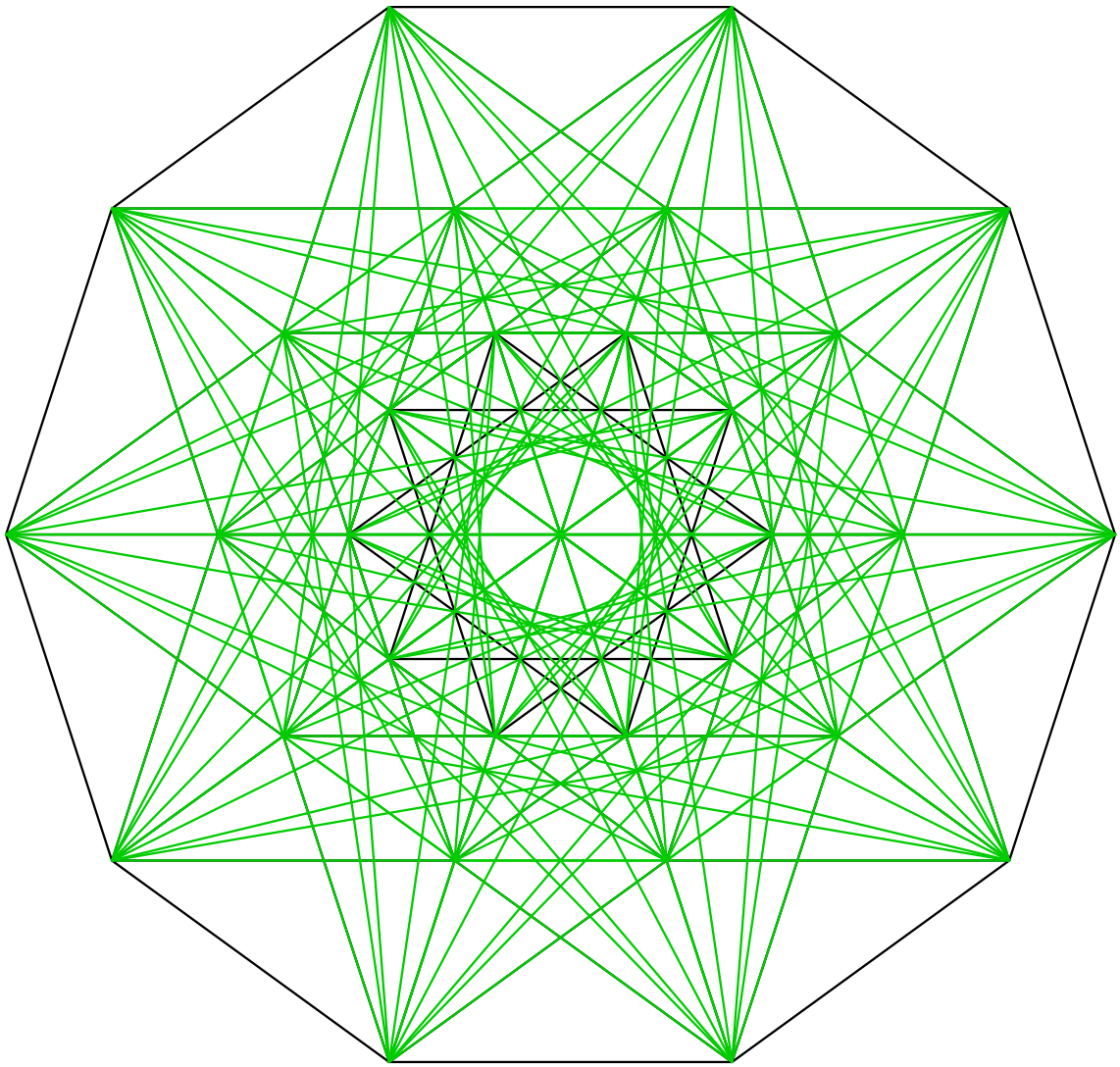

Abb. 5.3 160 Diagonalen der Länge √3

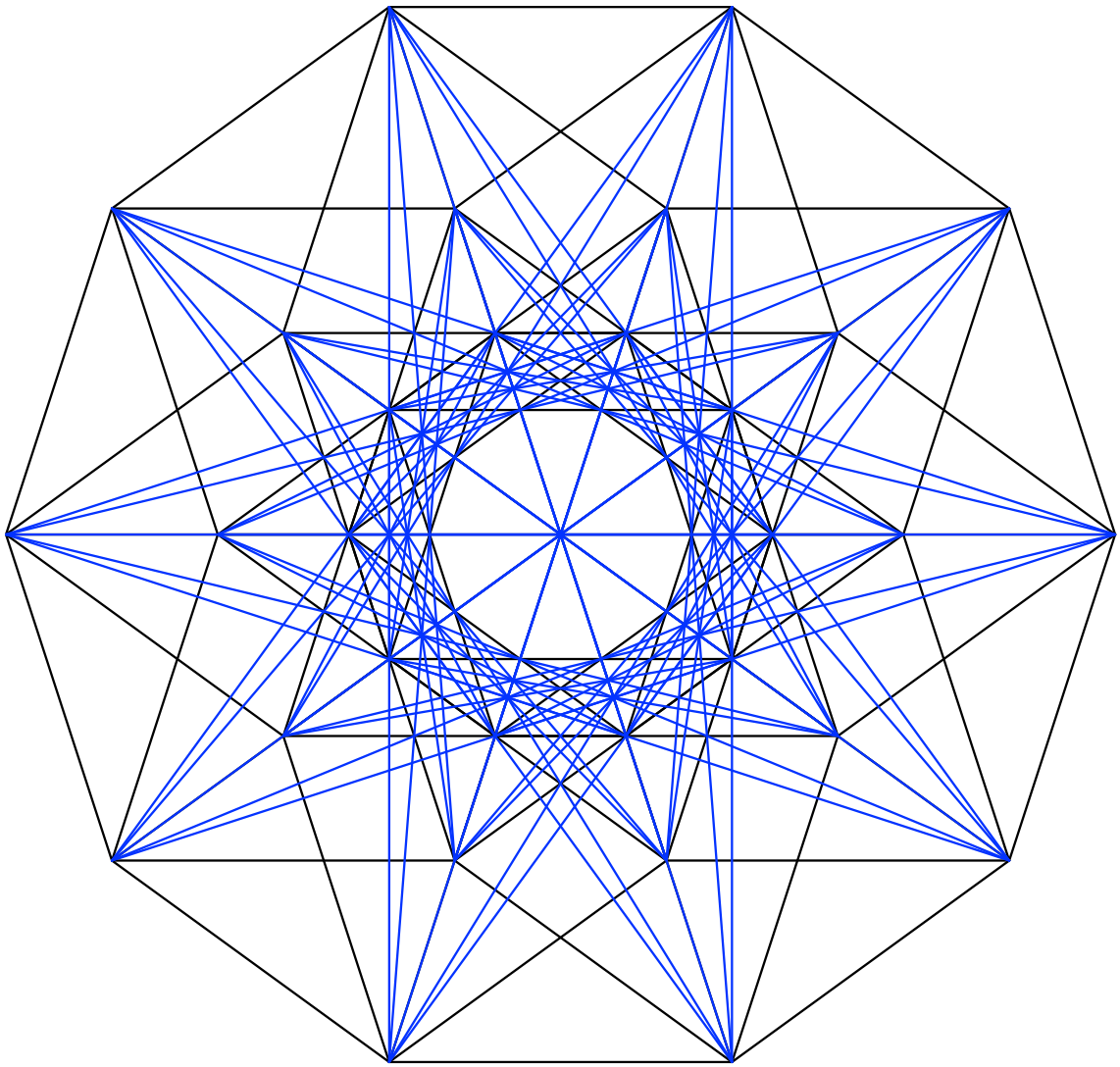

Abb. 5.4: 80 Diagonalen der Länge √4

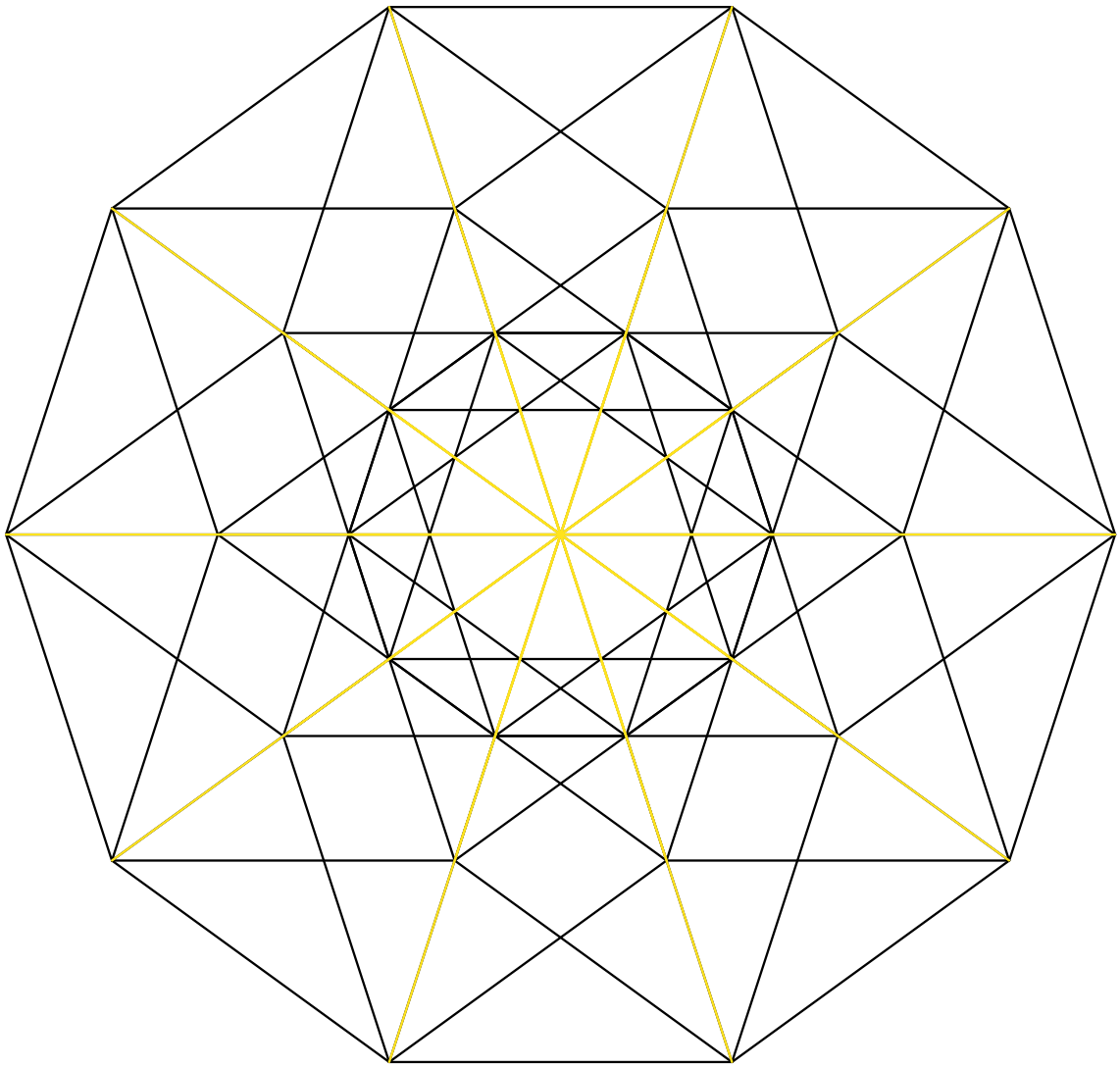

Abb. 5.5: 16 Diagonalen der Länge √5

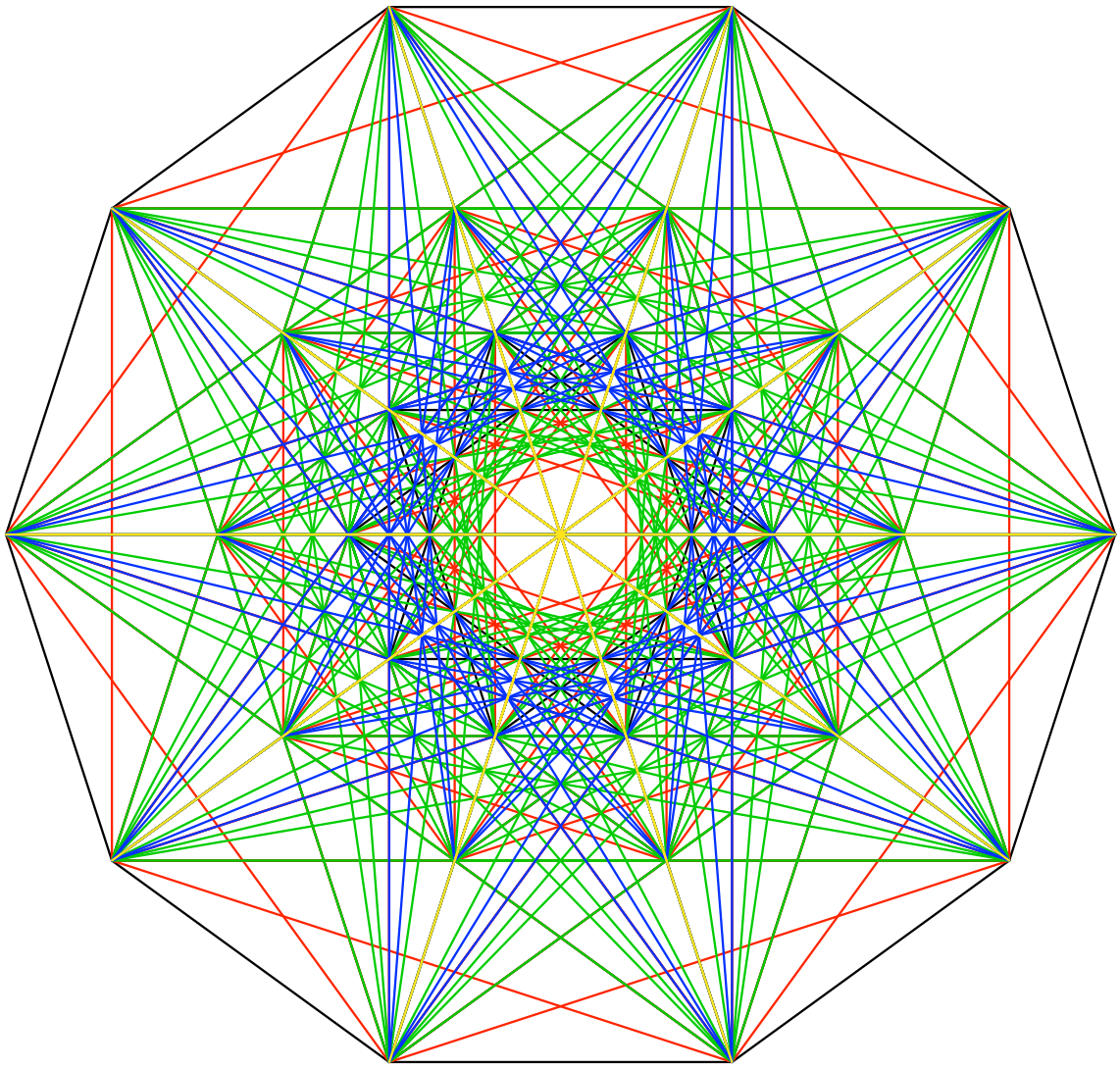

Abb. 5.6: Alle Diagonalen

Liste: 32, 80, 160, 160, 80, 16

6 Sechsdimensionaler Hyperwürfel

Liste : 64, 192, 480, 640, 480, 192, 32

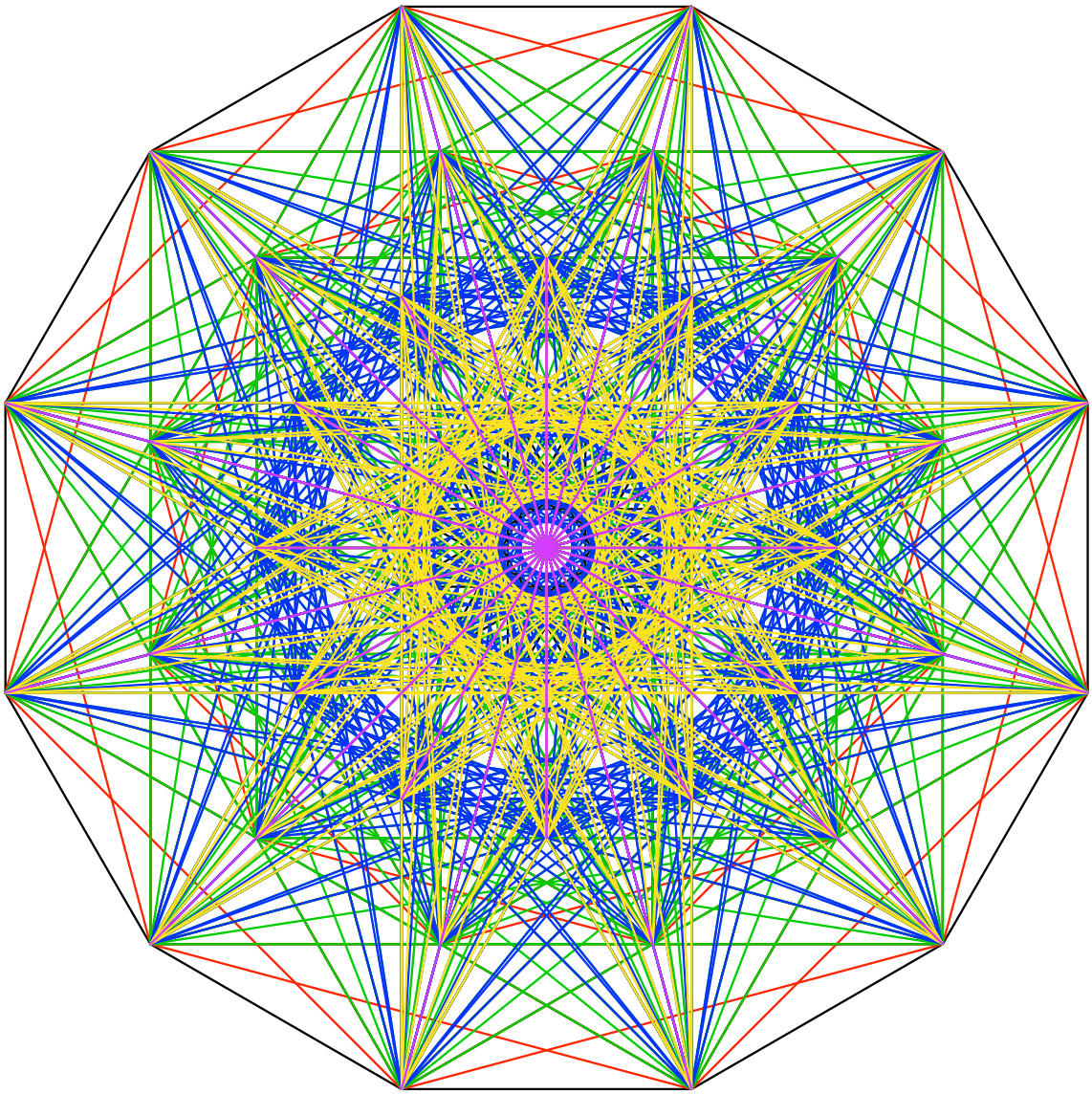

Abb. 6: Sechsdimensionaler Hyperwürfel mit allen Diagonalen

7 Anzahlen der Diagonalen

Die Tabelle 1 gibt eine Übersicht.

	Eck-punkte	Kan-ten	Diago-nalen	Diago-nalen	Diago-nalen	Diago-nalen	Diago-nalen
Länge	0	1	√2	√3	√4	√5	√6
Farbe							
Dimen-sion							
0	1						
1	2	1					
2	4	4	2				
3	8	12	12	4			
4	16	32	48	32	8		
5	32	80	160	160	80	16	
6	64	192	480	640	480	192	32

Tab. 1: Anzahlen der Diagonalen

Die Anzahlen können mit einer geeigneten Zweierpotenz ($(½)^{\text{Dimension}-1}$) skaliert werden (Tab. 2). Es erscheinen die Binomialkoeffizienten, in der ersten Spalte allerdings verdoppelt.

	Eck-punkte	Kan-ten	Diago-nalen	Diago-nalen	Diago-nalen	Diago-nalen	Diago-nalen
Länge	0	1	√2	√3	√4	√5	√6
Farbe							
Dimen-sion							
0	2						
1	2	1					
2	2	2	1				
3	2	3	3	1			
4	2	4	6	4	1		
5	2	5	10	10	5	1	
6	2	6	15	20	15	6	1

Tab. 2: Skalierte Tabelle