Hans Walser, [20160201]

Delta-Kurven-Umfang

Anregung: Renato Pandi

1 Worum geht es

Delta-Kurven sind geschlossene Kurven, welche in einem gleichseitigen Dreieck bei Drehungen einen Zwangslauf machen, indem immer alle drei Seiten des Dreiecks von der Delta-Kurve berührt werden. Die Abbildung 1 zeigt ein Beispiel in zwei speziellen und einer allgemeinen Lage.

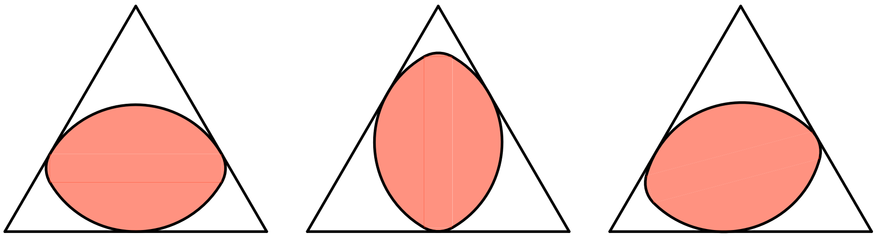

Abb. 1: Delta-Kurve

Wir zeigen, dass zu einem gegebenen Dreieck alle Delta-Kurven denselben Umfang haben.

2 Ein Schnittpunkt

Wir zeichnen in jedem der drei Berührungspunkte B_1, B_2, B_3 das gemeinsame Lot von Dreiecksseite und Rand der Delta-Kurve (Abb. 2).

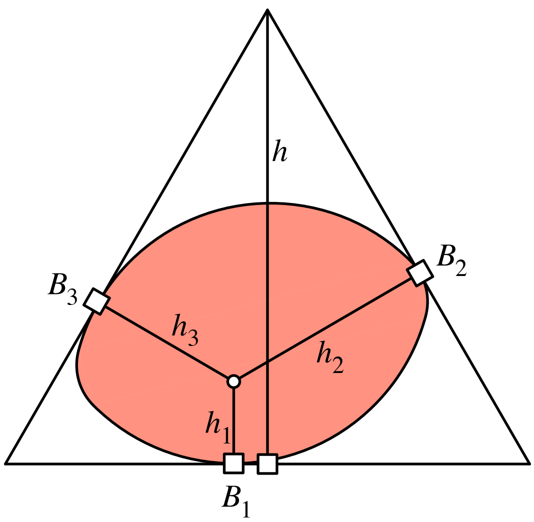

Abb. 2: Lote in den Berührungspunkten

Diese drei Lote schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt. Um dies einzusehen, benötigen wir eine kinematische Überlegung. Wir können die Delta-Kurve etwas bewegen, wobei die Berühreigenschaft erhalten bleibt. Diese Bewegung ist eine infinitesimale Drehung. Der momentane Drehpunkt dieser infinitesimalen Drehung liegt auf jedem der drei Berührlote. Diese scheiden sich daher in einem gemeinsamen Punkt, eben dem momentanen Drehpunkt der infinitesimalen Drehung. — Dieser momentane Drehpunkt bleibt aber beim weiteren Bewegen der Delta-Kurve nicht fest, weder in Bezug auf das Dreieck noch in Bezug auf die Delta-Kurve. Er ändert seine Lage ständig. Daher ändern auch die drei Abstände von diesem Drehpunkt zu den Lotfußpunkten.

3 Der Satz von Viviani

Der Satz von Viviani besagt, dass in einem gleichseitigen Dreieck die von einem beliebigen Punkt ausgehenden Lotstrecken auf die drei Seiten eine konstante Gesamtlänge haben. Diese Gesamtlänge ist die Höhe h des Dreieckes. Mit den Bezeichnungen der Abbildung 2 ist also für jede Lage der Delta-Kurve im Dreieck:

$$h_1 + h_2 + h_3 = h \tag{1}$$

Über den Satz von Viviani siehe (Kawasaki 2005), (Vargyas und Walser 2015).

4 Der Umfang

Wir drehen nun das Dreieck um die Delta-Kurve (Abb. 3). Dabei bewegen sich die drei Berührungspunkte. Bei einer infinitesimalen Drehung $d\phi$ legen sie auf dem Rand der Delta-Kurve die infinitesimalen Weglängen ds_1, ds_2, ds_3 zurück.

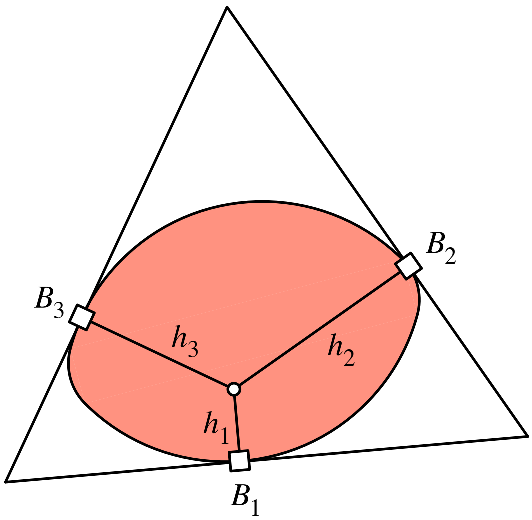

Abb. 3: Drehung des Dreiecks

Es ist:

$$\mathrm{d}s_1 = h_1 \mathrm{d}\phi, \quad \mathrm{d}s_2 = h_2 \mathrm{d}\phi, \quad \mathrm{d}s_3 = h_3 \mathrm{d}\phi \tag{2}$$

und wegen (1) folgt:

$$\mathrm{d}s_1 + \mathrm{d}s_2 + \mathrm{d}s_3 = \underbrace{\left(h_1 + h_2 + h_3\right)}_{h} \mathrm{d}\phi = h \mathrm{d}\phi \tag{3}$$

Nach einer Drehung um $\frac{2}{3}\pi \mathrel{\hat{=}} 120°$ ist das Dreieck auf sich abgebildet, das heißt der Punkt B_1 ist nun in der ursprünglichen Position des Punktes B_2, dieser in der ursprünglichen Position des Punktes B_3 und dieser Punkt wiederum in der ursprünglichen Position des Punktes B_1. Die drei Berührungspunkte haben also zusammen den Rand der Delta-Kurven genau einmal überstrichen. Somit erhalten wir für den Umfang u der Delta-Kurve:

$$u = \int\limits_{\substack{\text{Drittels-}\\ \text{drehung}}} \left(\mathrm{d}s_1 + \mathrm{d}s_2 + \mathrm{d}s_3\right) = h \int\limits_0^{\frac{2}{3}\pi} \mathrm{d}\phi = \tfrac{2}{3}\pi h \tag{4}$$

Das war zu zeigen. Der Umfang der Delta-Kurve ist der Umfang des Inkreises des Dreiecks.

Der Beweis bedarf allerdings noch einiger Ergänzungen und Präzisierungen. Dazu benötigen wir folgenden Hilfssatz.

5 Der Schwartensatz

Wir beginnen mit einer Delta-Kurve (Abb. 4).

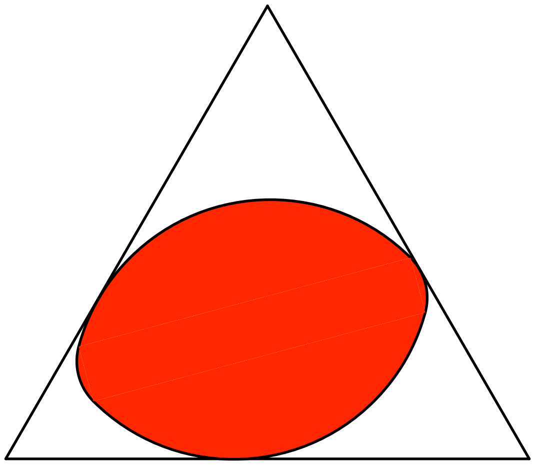

Abb. 4: Delta-Kurve

Mit der Dreieckshöhe h erhalten wir für die Delta-Kurve den Umfang gemäß (4).

Nun legen wir um die Delta-Kurve eine Schwarte, deren Dicke traditionellerweise mit ε bezeichnet wird (Abb. 5. Die Schwarte ist blau eingezeichnet).

Wenn wir gleichermaßen das Dreieck durch Parallelen im Abstand ε vergrößern, wird die Delta-Kurve mit Schwarte zu einer Delta-Kurve im vergrößerten Dreieck. Die Berührungspunkte verschieben sich rechtwinklig auf die Dreiecksseiten um den Betrag ε. Ein momentaner Drehpunkt bleibt erhalten.

Bei einer geschlossenen konvexen Kurve vergrößert sich der Umfang durch Anbringen einer Schwarte der Dicke ε um $2\pi\varepsilon$.

Die Delta-Kurve mit Schwarte hat somit den Umfang:

$$u_{\text{Schwarte}} = \tfrac{2}{3}\pi h + 2\pi\varepsilon \tag{5}$$

Das vergrößerte Dreieck hat die Höhe $h + 3\varepsilon$ (ein ε kommt beim Höhenfußpunkt dazu und zwei weitere ε bei der Dreiecksecke).

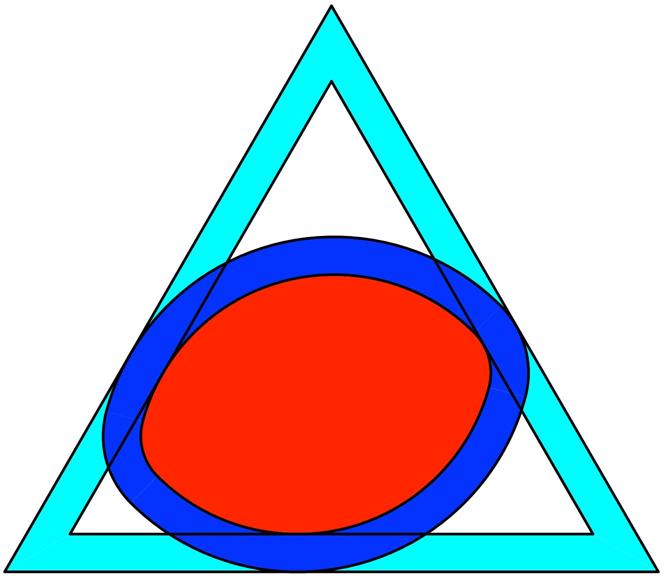

Abb. 5: Blaue Schwarte

Die Delta-Kurve mit Schwarte hat als Delta-Kurve im vergrößerten Dreieck den Umfang:

$$u_{\text{Schwarte}} = \tfrac{2}{3}\pi\left(h + 3\varepsilon\right) \tag{6}$$

Diese Formel ist mit (5) kompatibel.

Der Schwartensatz besagt, dass wir aus einer Delta-Kurve durch Anbringen einer Schwarte eine Delta-Kurve in einem entsprechend vergrößerten Dreieck erhalten. Mit $\varepsilon \to 0$ kommen wir bezüglich Figur und Umfang auf die ursprünglich Delta-Kurve zurück.

6 Drehpunkt außerhalb

Im Beispiel der Abbildung 6 ist der momentane Drehpunkt außerhalb des Dreieckes.

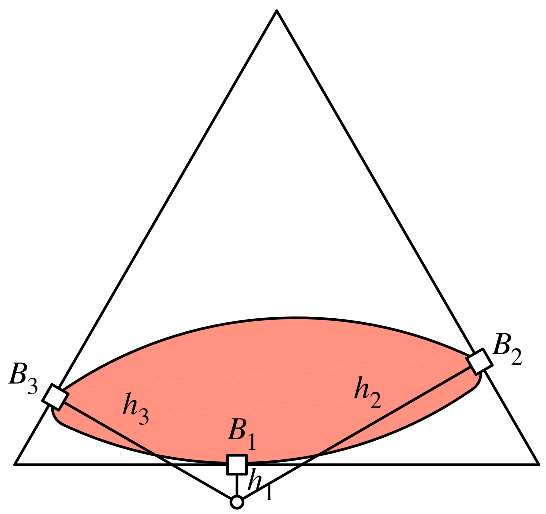

Abb. 6: Momentaner Drehpunkt außerhalb des Dreieckes

Damit der Satz von Viviani immer noch stimmt, müssen wir mit algebraischen Abständen rechnen und im Beispiel der Abbildung 6 den Abstand h_1 negativ bewerten. Um dieses Vorzeichenproblem zu umgehen, fügen wir eine so dicke Schwarte dazu und vergrößern das Dreieck entsprechend, dass der Viviani-Punkt (der momentane Drehpunkt) ins Innere des vergrößerten Dreiecks zu liegen kommt.

7 Eckige Delta-Kurven

Viele klassische Delta-Kurven haben Ecken. Die Abbildung 7 zeigt ein Beispiel, das Zweieck mit Innenwinkeln von 120°. In den Ecken sind die Normalen auf die Delta-Kurve nicht definiert. Mit dem Schwarten-Trick können wir das aber regeln. Wegen (5) und (6) gilt mit $\varepsilon \to 0$ die Umfangsformel auch für die eckige Delta-Kurve.

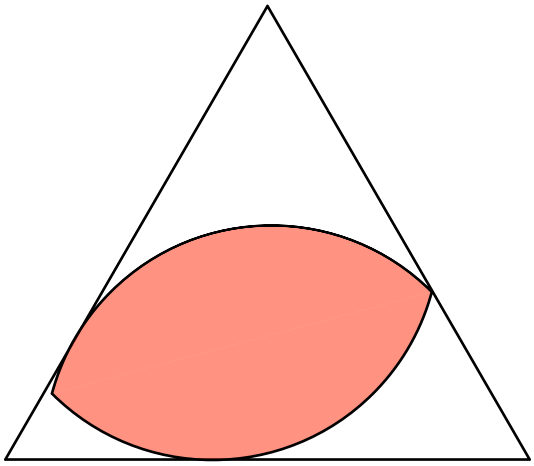

Abb. 7: Delta-Kurve mit Ecken

8 Frage der Umkehrung

Selbstverständlich ist *nicht* jede Kurve mit $u = \frac{2}{3}\pi h$ eine Delta-Kurve. Wir konstruieren ein Gegenbeispiel. Zunächst zeichnen wir zu einem gegebenen Dreieck mit der Höhe h einen Bogen mit dem Radius h und dem Winkel $\frac{\pi}{9} \mathrel{\hat{=}} 20°$ (Abb. 8). So ganz nebenbei: Mit Zirkel und Lineal ist das nicht machbar.

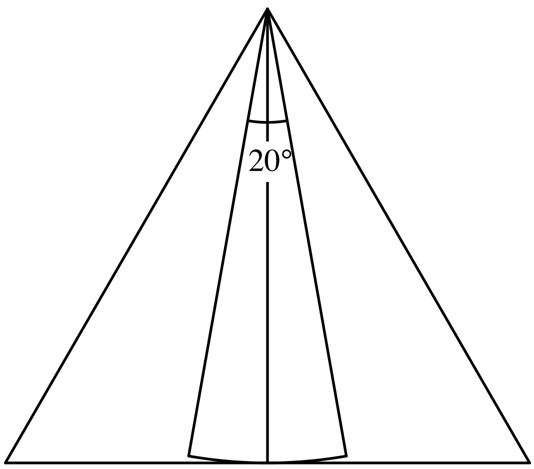

Abb. 8: Bogen mit 20°

Dann fügen wir sechs solche Bogen je um 60° verdreht aneinander und erhalten so ein Bogen-Sechseck (Abb. 9).

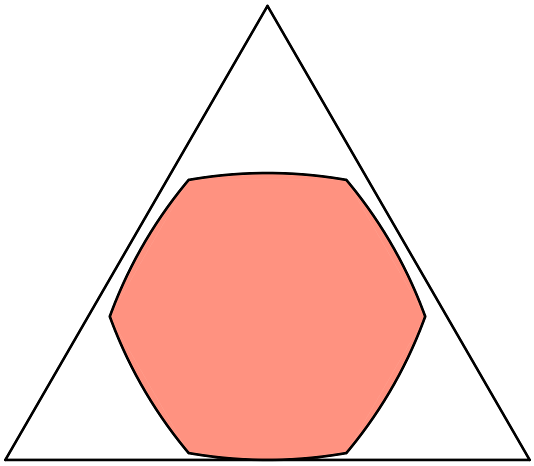

Abb. 9: Bogen-Sechseck

Dieses Bogen-Sechseck hat den Umfang $u = 6\frac{\pi}{9} = \frac{2}{3}\pi$, ist aber offensichtlich keine Delta-Kurve im Dreieck. Die Sache hat System, wie wir gleich sehen werden.

Literatur

Kawasaki, Ken-Ichiroh (2005): Proof Without Words: Viviani's Theorem. Mathematics Magazine, Vol. 78, No. 3, p. 213.

Vargyas, Emese und Walser, Hans (2015): Verallgemeinerung des Satzes von Viviani. MI, Mathematikinformation Nr. 63, 15. September 2015. ISSN 1612-9156. S. 3-10.