Hans Walser, [20160205]

Delta-Bogenvielecke

Anregung: Renato Pandi

1 Deltakurven

Delta-Kurven sind geschlossene Kurven, welche in einem gleichseitigen Dreieck bei Drehungen einen Zwangslauf machen, indem immer alle drei Seiten des Dreiecks von der Delta-Kurve berührt werden.

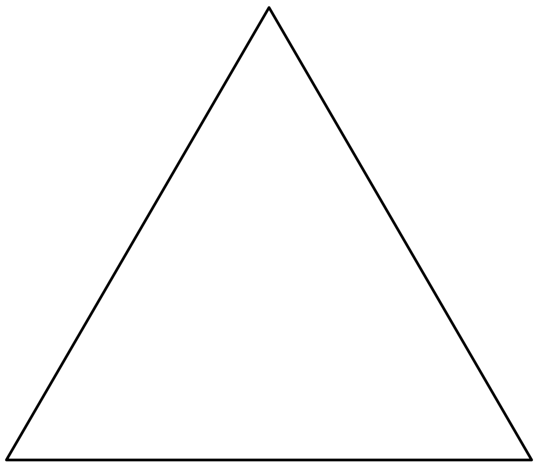

Abb. 1: Die Welt in der wir leben

Es werden regelmäßige Bogenvielecke vorgestellt, welche als Deltakurven funktionieren. Beweise fehlen weitgehend.

2 Bildergalerie

Zunächst Beispiele.

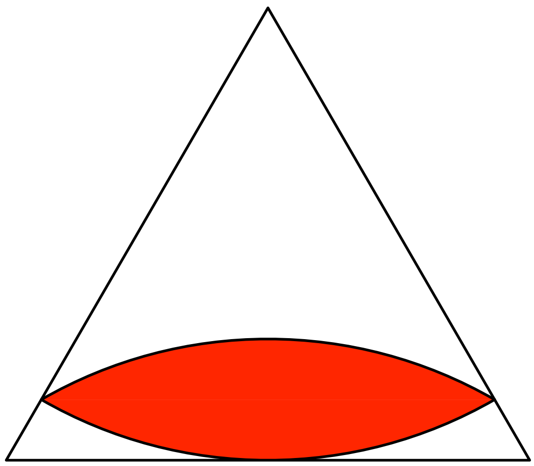

Abb. 2a: Zweieck

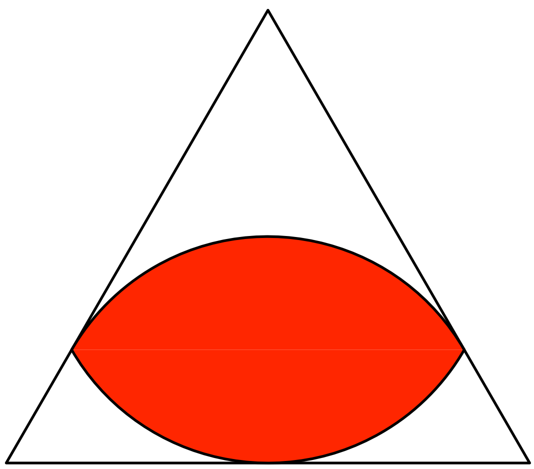

Abb. 2b: Zweieck

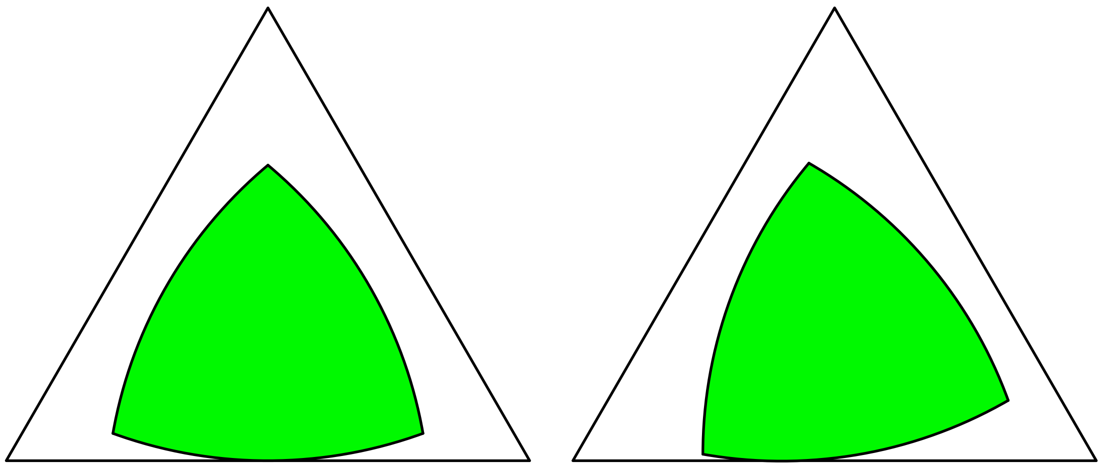

Abb. 3a: Das kann’s wohl nicht sein

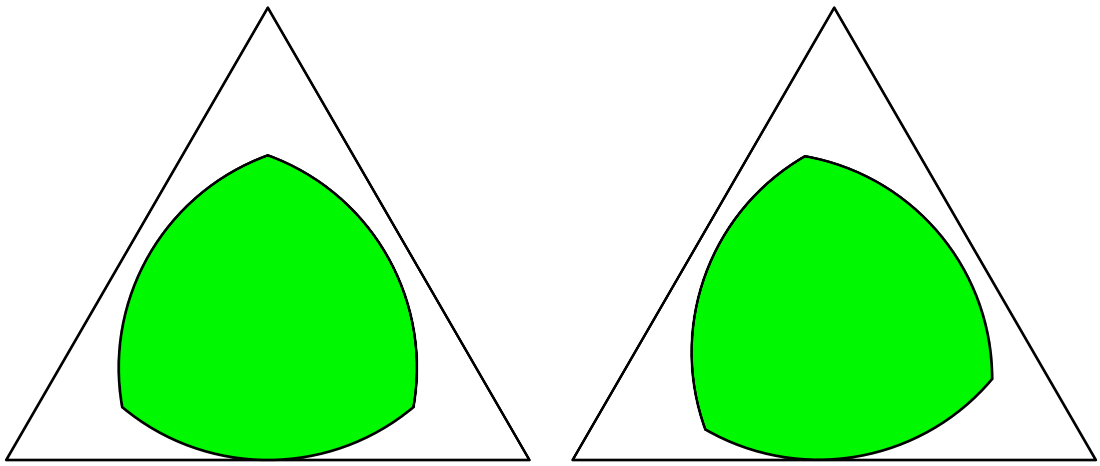

Abb. 3b: Auch das geht nicht

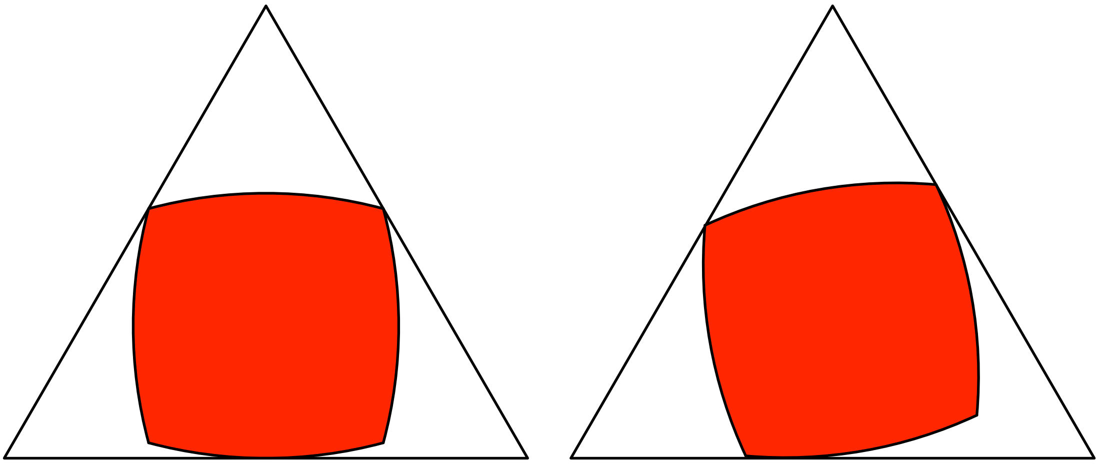

Abb. 4a: Viereck

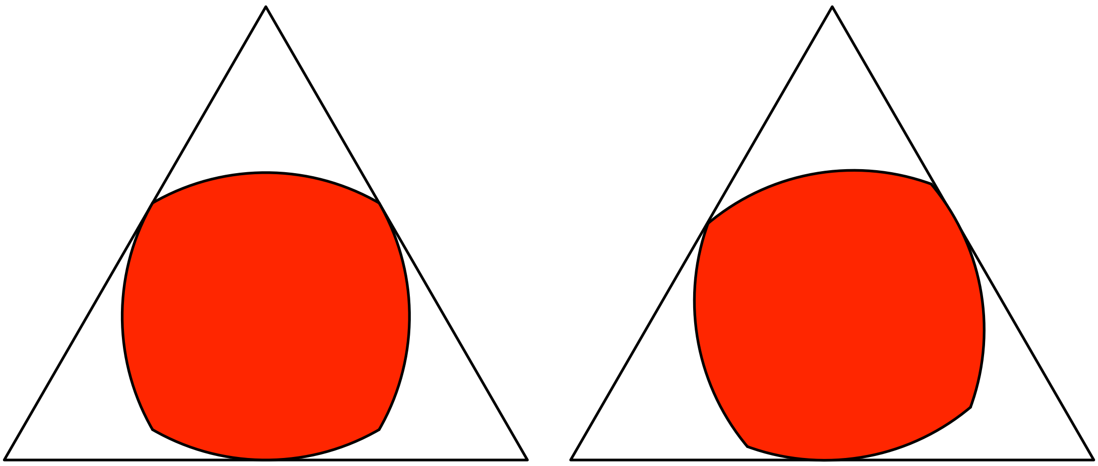

Abb. 4b: Viereck

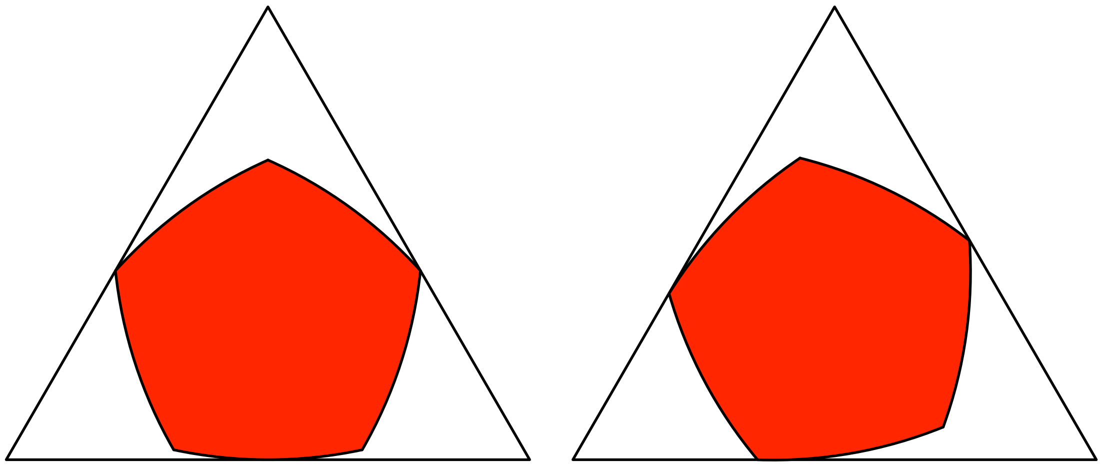

Abb. 5a: Fünfeck

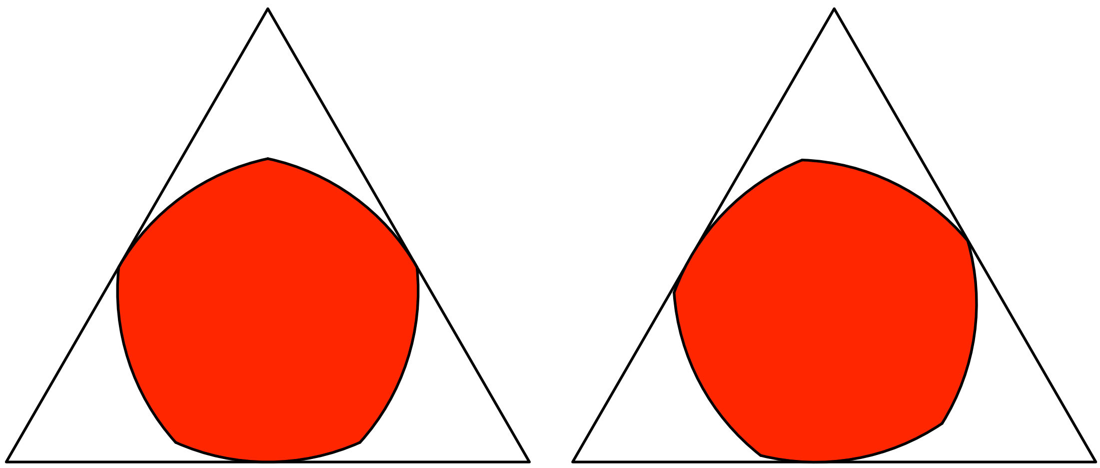

Abb. 5b: Fünfeck

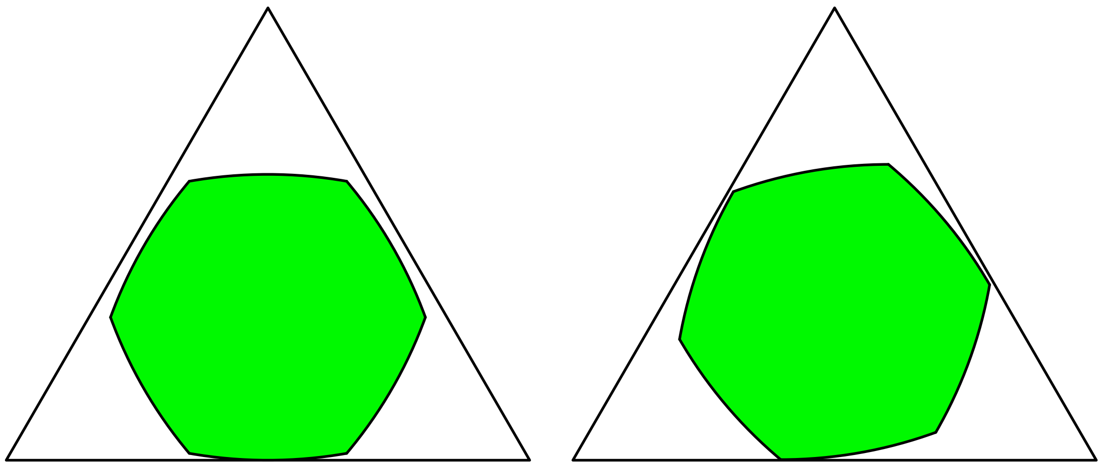

Abb. 6a: Sechseck geht nicht

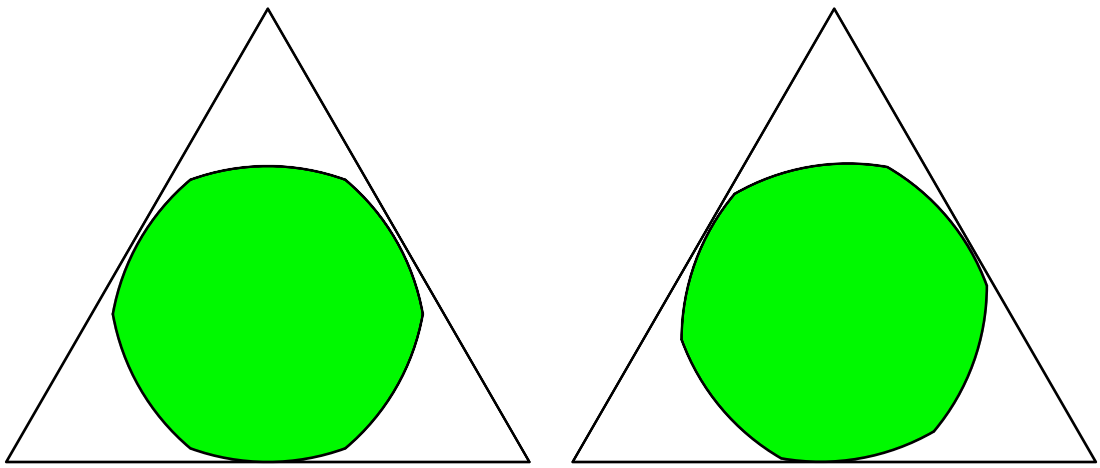

Abb. 6b: Sechseck geht nicht

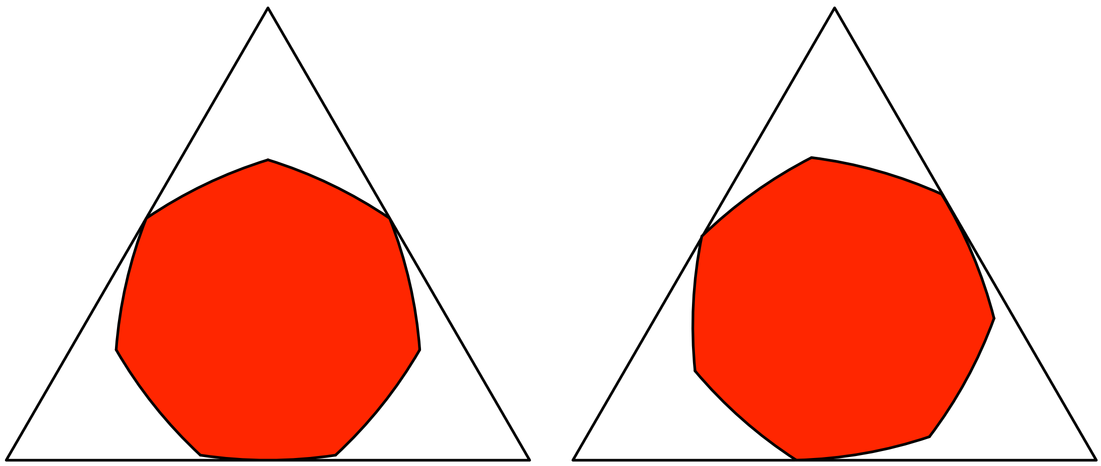

Abb. 7a: Siebeneck

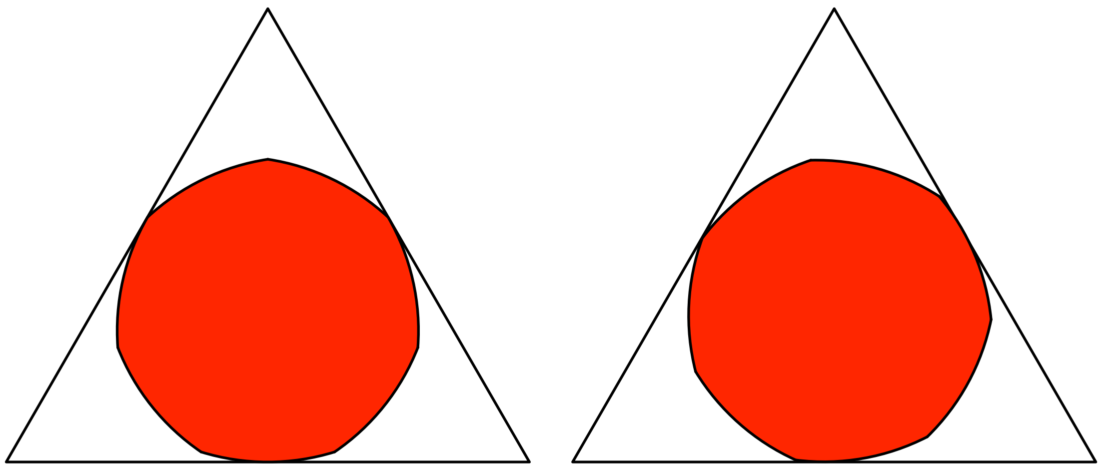

Abb. 7b: Siebeneck

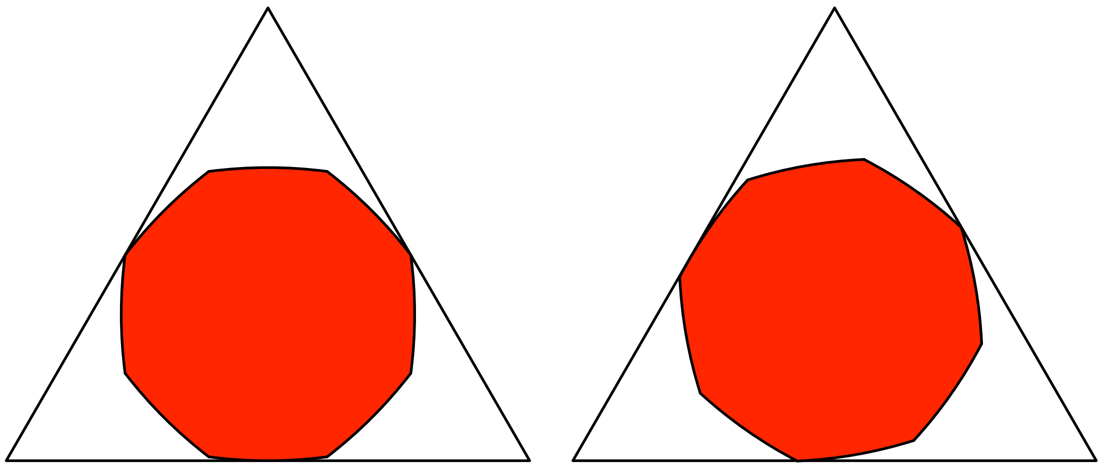

Abb. 8a: Achteck

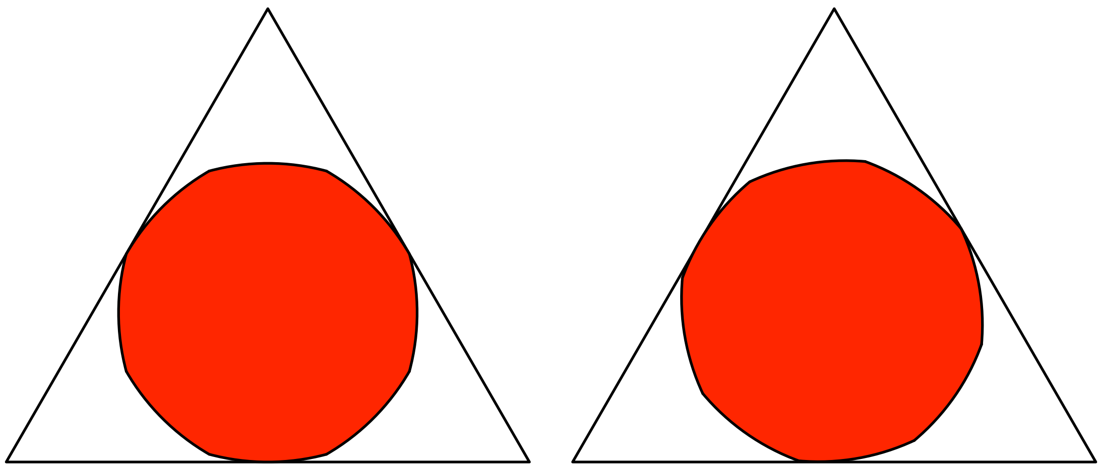

Abb. 8b: Achteck

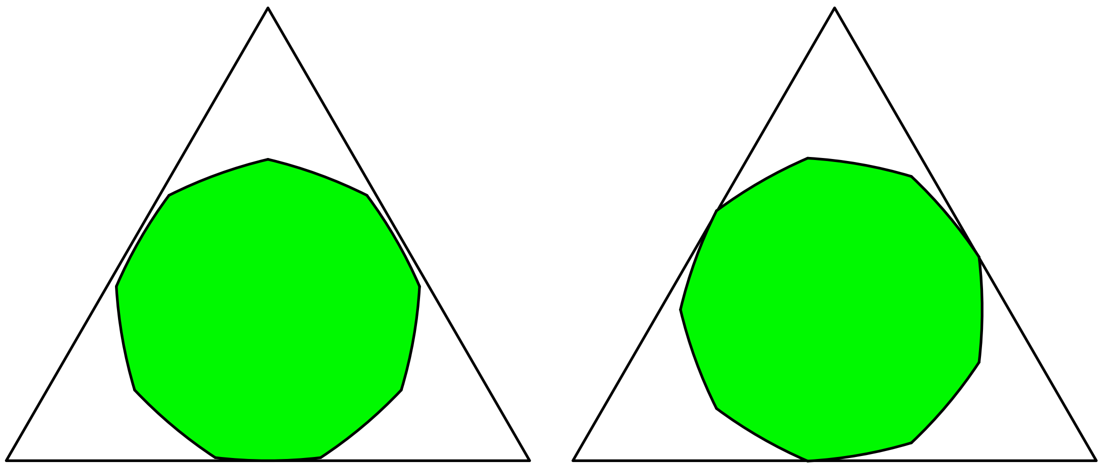

Abb. 9a: Neuneck geht nicht

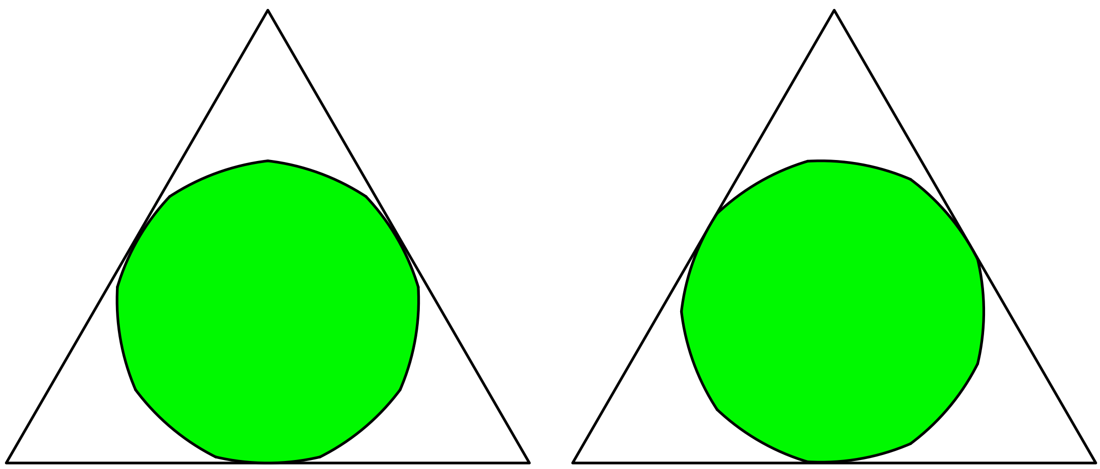

Abb. 9b: Neuneck geht knapp nicht

Vermutung: Vielecke mit Eckenzahl $n \bmod 3 = 0$ gehen nicht, die anderen schon.

3 Konstruktion und Rechnungen

Wir beschreiben die Konstruktion der Bogen-*n*-Ecke. Die Zeichnungen sind exemplarisch für $n = 5$. Mit h bezeichnen wir die Höhe des Dreieckes.

3.1 Version a

Wir zeichnen einen Bogen mit dem Radius h und dem Zentriwinkel $\frac{1}{n}\frac{2}{3}\pi$. Für $n = 5$ sind das 24° (Abb. 10).

Anschließend fügen wir $n = 5$ solche Bögen je um $\frac{2\pi}{n}$ (in unserem Beispiel also 72°) gedreht aneinander und malen mit roter Farbe aus.

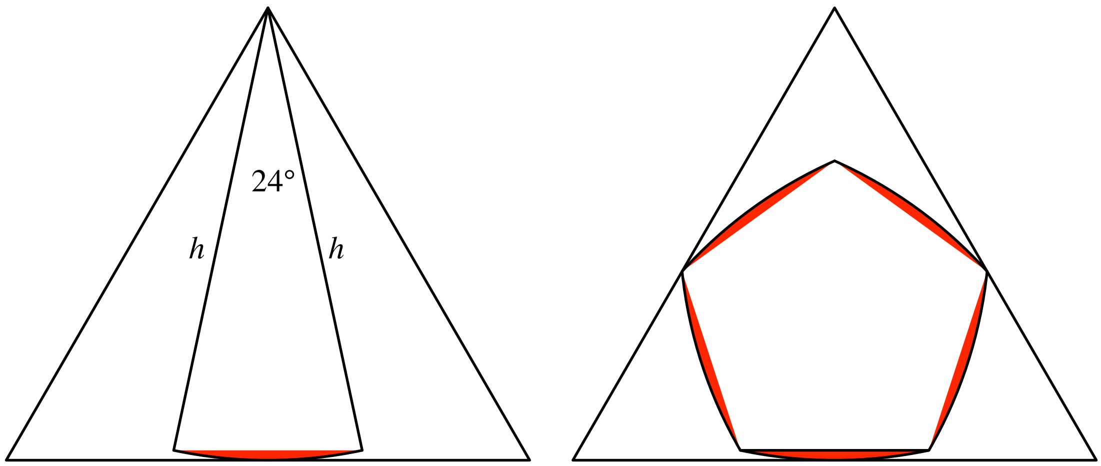

Abb. 10: Bogen und Bogenfünfeck

Wir berechnen nun den Radius r_a des Außenkreises (Umkreises) des Bogenfünfeckes und den Radius r_i des Innenkreises Abb. 11).

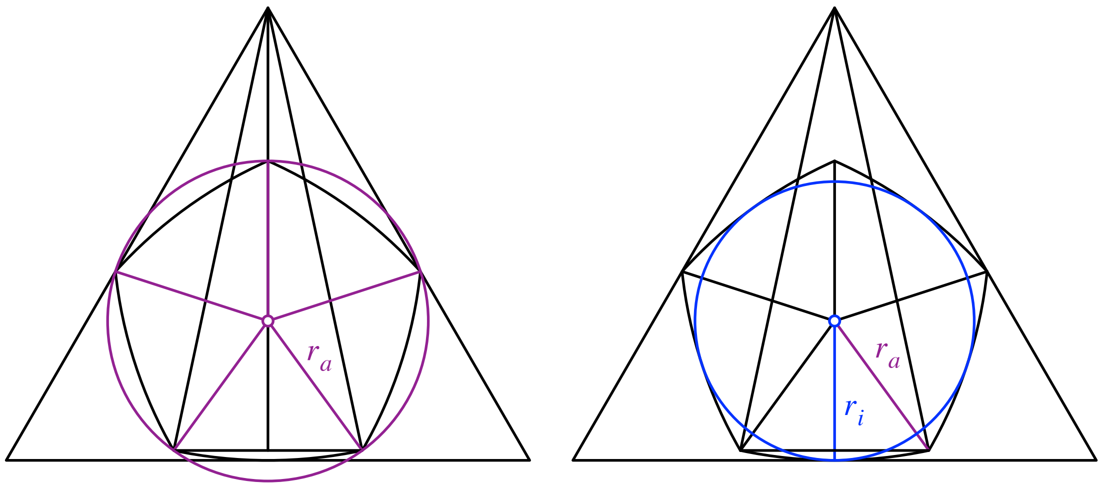

Abb. 11: Außenkreis und Innenkreis

Für den Radius r_a des Außenkreises finden wir:

$$r_a = h\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \tag{1}$$

Die Tabelle 1 zeigt die ersten numerischen Werte des Koeffizienten von h.

n	Koeffizient	n	Koeffizient
		11	0.3373981493
2	0.5000000000	12	0.3367439314
3	0.3949308438	13	0.3362361129
4	0.3660254037	14	0.3358339921
5	0.3537204958	15	0.3355101074
6	0.3472963554	16	0.3352453803
7	0.3435073793	17	0.3350262186
8	0.3410813772	18	0.3348427245
9	0.3394329734	19	0.3346875512
10	0.3382612125	20	0.3345551521

Tab. 1: Koeffizienten für Außenradius

Die Werte streben zwar gegen $\frac{1}{3}$ sind aber alle größer als $\frac{1}{3}$ (Beweis sei dem Leser überlassen). Somit sind die Werte größer als der Inkreisradius des Dreieckes. Daraus folgt aus Symmetriegründen, dass ein Bogen-n-Eck mit $n \bmod 3 = 0$ nicht passen kann (Abb. 12 links für $n = 6$).

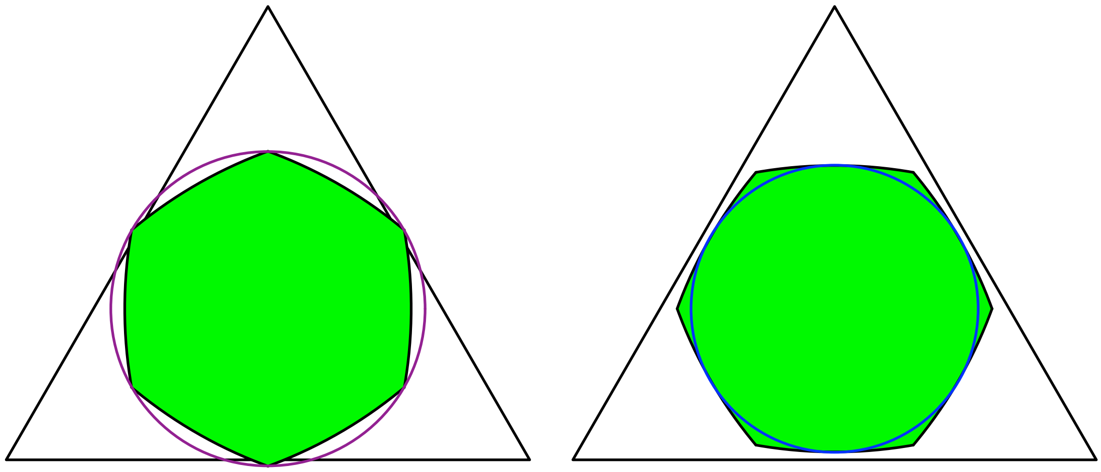

Abb. 12: Zu groß und zu klein

Für den Radius r_i des Innenkreises finden wir:

$$r_i = h\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3n}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \cos\left(\frac{\pi}{3n}\right) - 1\right) \tag{2}$$

Die Tabelle 2 zeigt die ersten numerischen Werte der Koeffizienten von h.

n	Koeffizient	n	Koeffizient
		11	0.319203076
		12	0.321464358
3	0.137158043	13	0.323223011
4	0.224744871	14	0.324617730
5	0.264313493	15	0.325742457
6	0.285575220	16	0.326662658
7	0.298320281	17	0.327425089
8	0.306562965	18	0.328063870
9	0.312201018	19	0.328604366
10	0.316227426	20	0.329065758

Tab. 2: Koeffizienten für Innenradius

Die Werte streben zwar gegen $\frac{1}{3}$ sind aber alle kleiner als $\frac{1}{3}$ (Beweis ?). Daraus folgt aus Symmetriegründen erneut, dass ein Bogen-n-Eck mit $n \bmod 3 = 0$ nicht passen kann (Abb. 12 rechts).

3.2 Version b

Wir zeichnen einen Bogen mit dem Radius $\frac{h}{2}$ und dem Zentriwinkel $\frac{1}{n}\frac{4}{3}\pi$. Für n = 5 sind das 48° (Abb. 13).

Anschließend fügen wir n = 5 solche Bögen je um $\frac{2\pi}{n}$ (in unserem Beispiel also 72°) gedreht aneinander und malen mit roter Farbe aus.

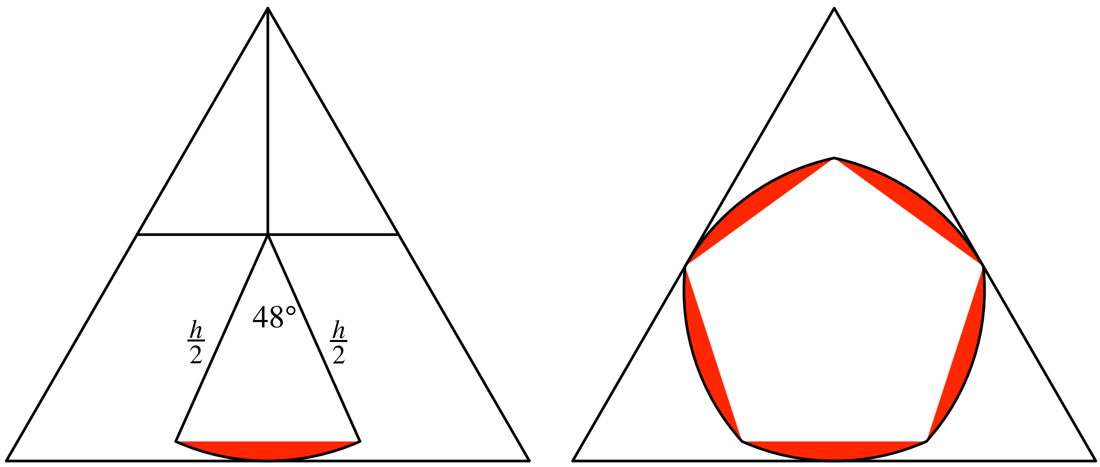

Abb. 13: Bogen und Bogenfünfeck

Für den Radius r_a des Außenkreises finden wir:

$$r_a = h\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3n}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \tag{3}$$

Die Tabelle 3 zeigt die ersten numerischen Werte des Koeffizienten von h.

n	Koeffizient	n	Koeffizient
		11	0.3358703844
2	0.4330127020	12	0.3354625190
3	0.3711135996	13	0.3351458028
4	0.3535533905	14	0.3348949322
5	0.3459908541	15	0.3346928218
6	0.3420201433	16	0.3345275942
7	0.3396706857	17	0.3343907840
8	0.3381633788	18	0.3342762238
9	0.3371378489	19	0.3341793336
10	0.3364081825	20	0.3340966556

Tab. 3: Koeffizienten für Außenradius

Die Werte streben zwar gegen $\frac{1}{3}$ sind aber alle größer als $\frac{1}{3}$ (Beweis sei dem Leser überlassen). Somit sind die Werte größer als der Inkreisradius des Dreieckes. Daraus folgt aus Symmetriegründen, dass ein Bogen-n-Eck mit $n \bmod 3 = 0$ nicht passen kann (Abb. 14 links für $n = 6$).

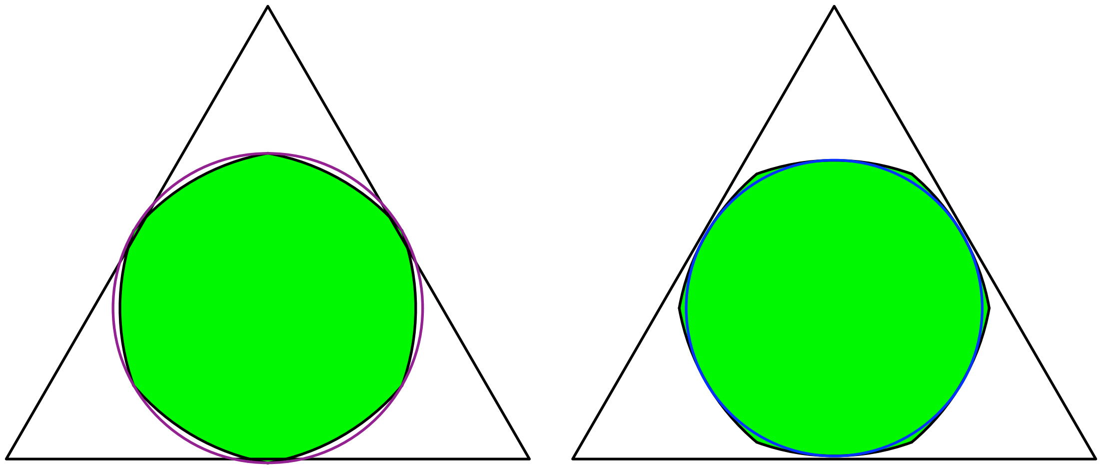

Abb. 14: Zu groß und zu klein

Für den Radius r_i des Innenkreises finden wir:

$$r_i = h\left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3n}\right)}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3n}\right) + \frac{1}{2}\right) \tag{4}$$

Die Tabelle 4 zeigt die ersten numerischen Werte der Koeffizienten von h.

n	Koeffizient	n	Koeffizient
		11	0.3245293127
		12	0.3259345620
3	0.2157104895	13	0.3270284208
4	0.2670370868	14	0.3278965185
5	0.2908386804	15	0.3285969554
6	0.3037942563	16	0.3291702788
7	0.3116173001	17	0.3296454810
8	0.3166997937	18	0.3300437376
9	0.3201867700	19	0.3303808049
10	0.3226822463	20	0.3306686041

Tab. 4: Koeffizienten für Innenradius

Die Werte streben zwar gegen $\frac{1}{3}$ sind aber alle kleiner als $\frac{1}{3}$ (Beweis ?). Daraus folgt aus Symmetriegründen erneut, dass ein Bogen-*n*-Eck mit $n \bmod 3 = 0$ nicht passen kann (Abb. 14 rechts).

Damit haben wir bewiesen, dass Vielecke mit Eckenzahl $n \bmod 3 = 0$ nicht gehen. Dass es mit Vielecken anderer Eckenzahlen immer geht, ist nicht bewiesen.