Hans Walser, [201200902]

DIN-Spirale

Die Schlange war schlauer als alle Tiere des Feldes, die Gott gemacht hatte.

Gen 3,1.

1 DIN-Format

Brillenschlange: Aus einem DIN A4 Papier erhalten wir durch Halbieren zwei DIN A5 Papiere. Diese haben dasselbe Seitenverhältnis wie das DIN A4 Papier, sie sind also ähnlich.

Dann können wir weiter halbieren und erhalten die Folge A5, A6, A7, ... (Abb. 1).

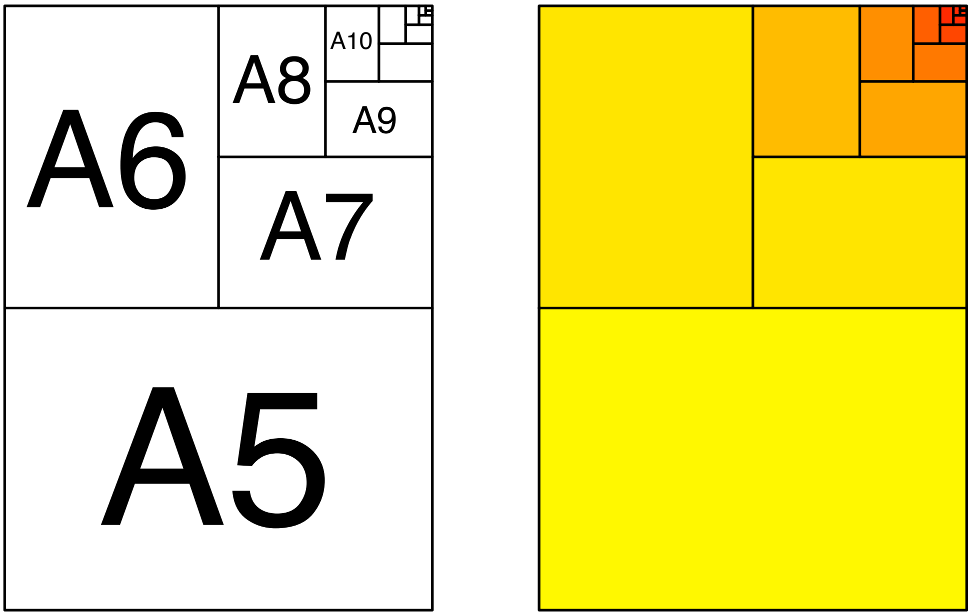

Abb. 1: Unterteilung des DIN A4 Papiers

Kobra: Da gibt es so eine Treppe (Abb. 2).

Kreuzotter: Die hat aber megaviele Stufen.

Viper: Und ist trotzdem nur so hoch wie das Papierrechteck.

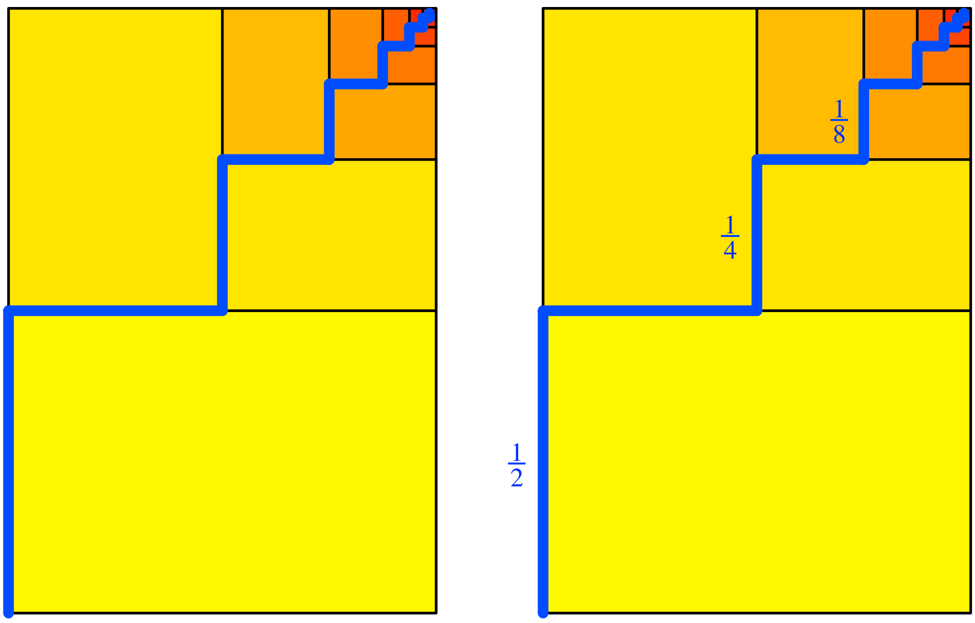

Abb. 2: Treppe und Stufen

BRILLENSCHLANGE: Also die gesamte Höhe ist gleich viel wie ein Halbes plus ein Viertel plus ein Achtel plus und so weiter —

RINGELNATTER: Wie geht es weiter?

BRILLENSCHLANGE: Plus ein Sechzehntel plus ein Zweiunddreißigstel plus ein Vierundsechzigstel plus —

RINGELNATTER: Danke, es reicht.

BRILLENSCHLANGE: In Brüchen aufgeschrieben:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

RINGELNATTER: Gut, dass die Stufen immer weniger hoch werden, sonst hätten wir eine Himmelstreppe.

BRILLENSCHLANGE: Wir können aber die Teilrechtecke auch spiralförmig anordnen (Abb. 3).

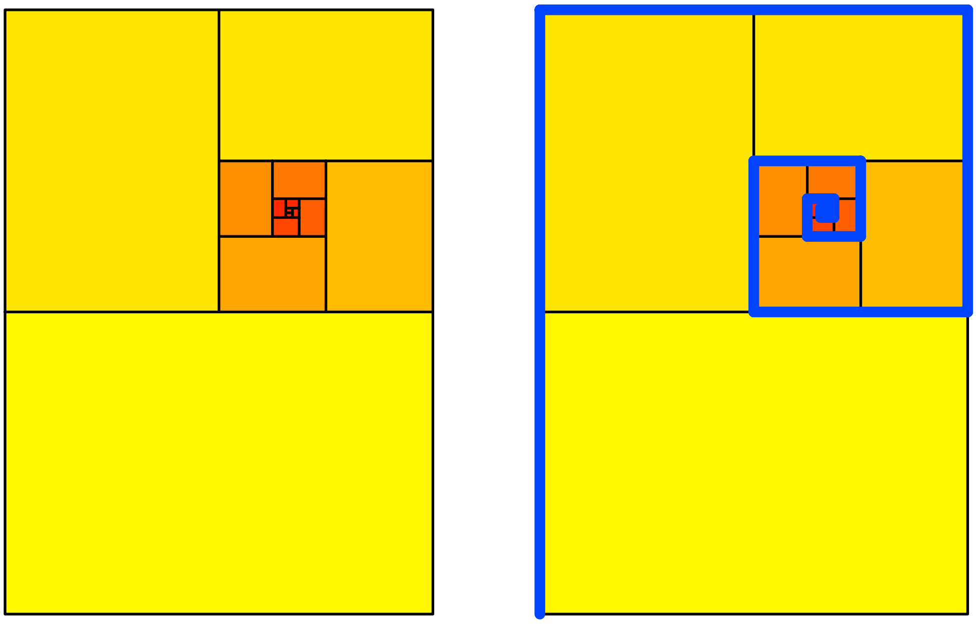

Abb. 3: Spiralförmig Anordnung

RINGELNATTER: Bisschen eckig, die Spirale. Kann ich besser (schlängelt sich in eine Spirale, Abb. 4).

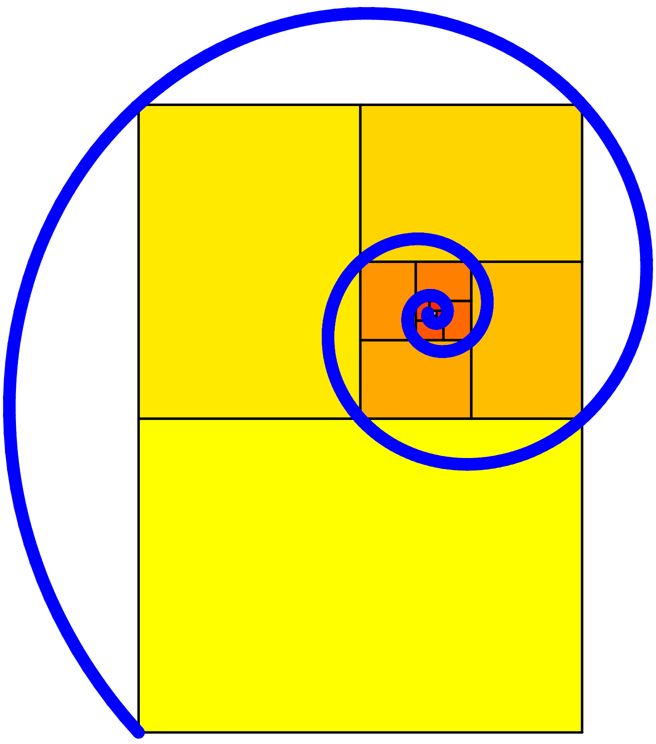

Abb. 4: Ringelnatter

KREUZOTTER: Wie lang ist die eckige blaue Spirale?

Viper: Das ist einfach. Die eckige blaue Spirale ist gleich lang wie der Umfang des Rechtecks (Abb. 5).

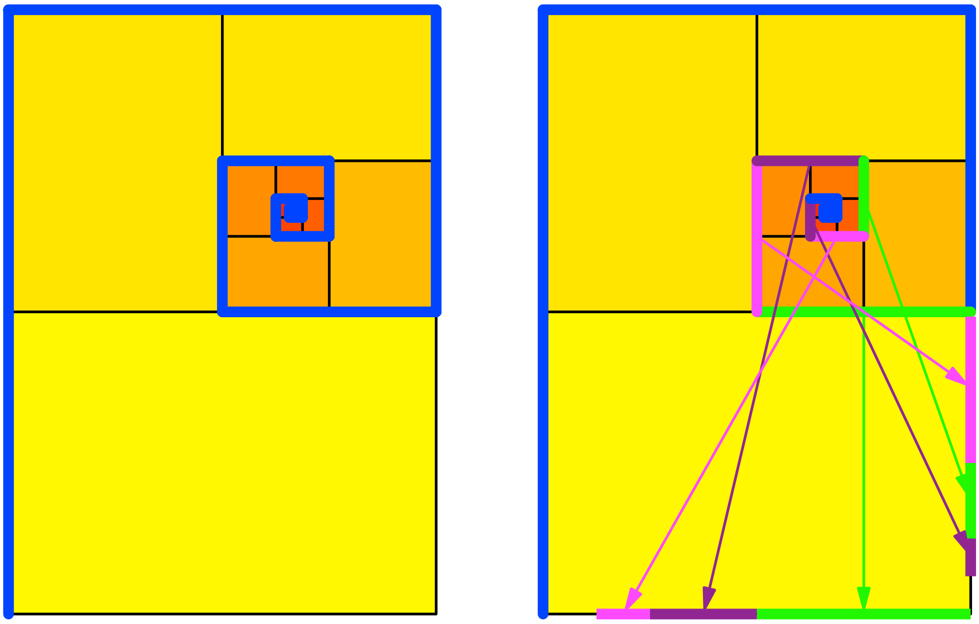

Abb. 5: Spiralenlänge

Kreuzotter: Es gibt noch andere Möglichkeiten, eine eckige Spirale einzuzeichnen. Zum Beispiel Diagonalen oder Mitte-Mitte (Abb. 6).

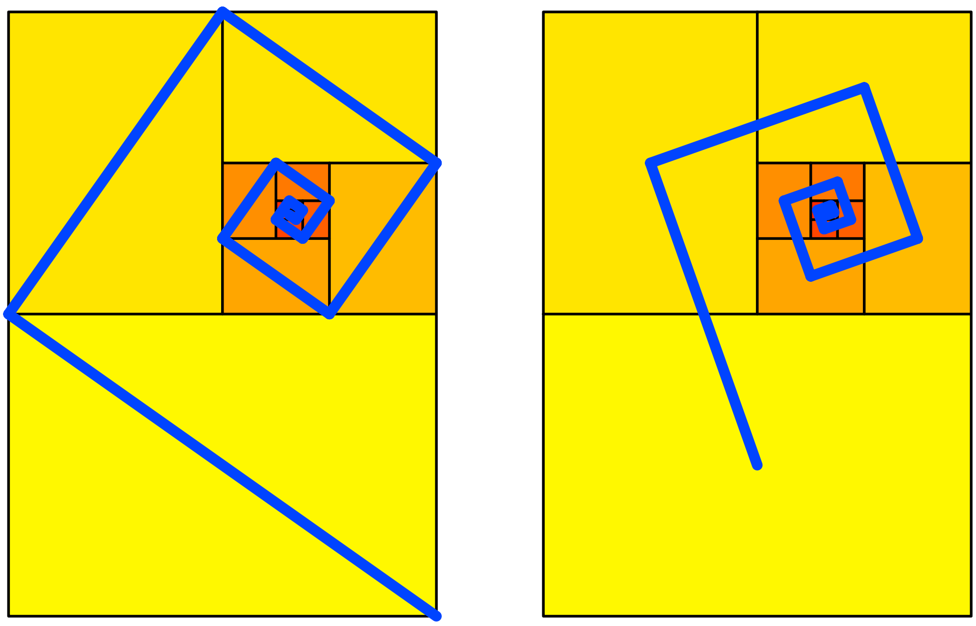

Abb. 6: Weitere Spiralen

Brillenschlange: Diese eckigen Spiralen haben doch alle die gleich Form. Sie sind nur unterschiedlich groß.

Kobra: Und die haben auch alle dasselbe Zentrum. Das Zentrum ist im Drittelpunkt rechts oben (Abb. 7). Also Dritteln durch Halbieren.

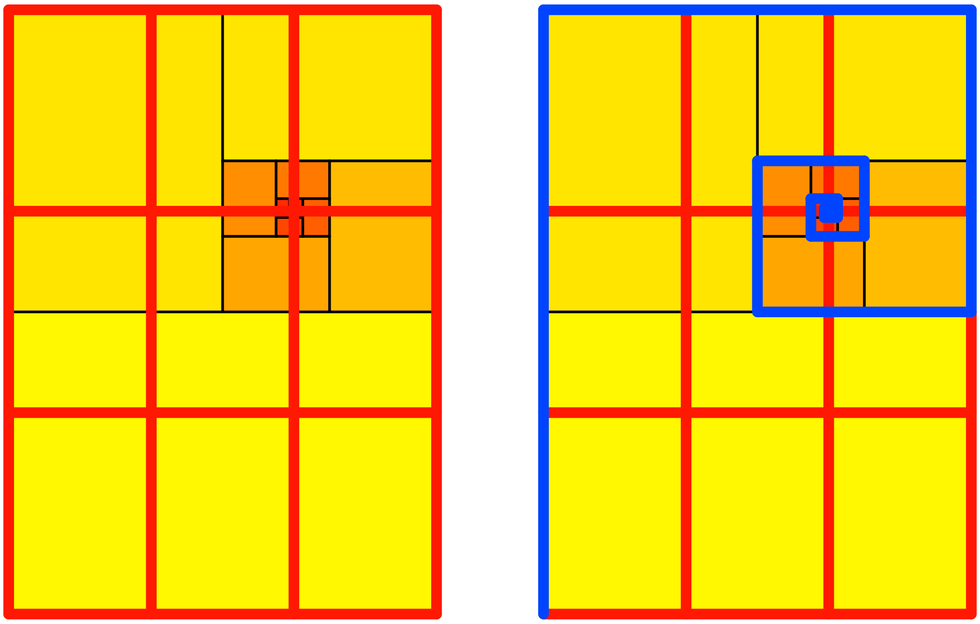

Abb. 7: Dritteln

KREUZOTTER: Warum ist das so?

VIPER: Welches DIN-Format hat ein kleines rotes Rechteck?

RINGELNATTER: Können wir den Drittelpunkt auch ohne unendliches Halbieren finden?

BRILLENSCHLANGE: Gibt es außer den DIN Rechtecken andere Figuren, welche in zwei zur Ausgangsfigur ähnliche Hälften zerlegt werden können?

KOBRA: Immer mit der Ruhe. Schauen wir das mal in der senkrechten Richtung an. Die blaue Spirale geht zuerst Eins hoch, dann ein Halbes hinunter, dann einen Viertel hinauf, einen Achtel runter und so weiter und so fort (Abb. 8).

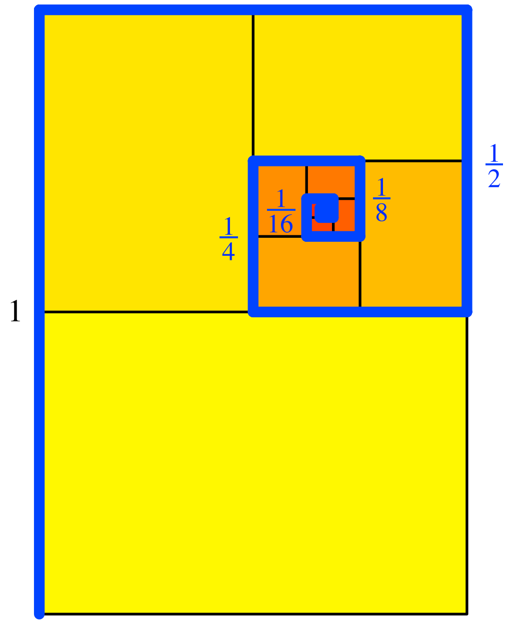

Abb. 8: Höhenanteile

Das macht:

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}\pm\cdots=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\tfrac{2}{3}$$

RINGELNATTER: Verstehe Bahnhof.

KOBRA: Na, dann rechnen wir ein bisschen. Bei der Treppe (Abb. 2) sahen wir:

$$1=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\cdots$$

Wir vertauschen links und rechts und geben je eins dazu:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\cdots=2$$

Und jetzt gruppieren wir links um:

$$\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\cdots\right)+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{32}+\cdots\right)=2$$

Die zweite Klammer ist die Hälfte der ersten Klammer:

$$\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\cdots\right)+\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\cdots\right)=2$$

Also ist anderthalb mal die erste Klammer gleich 2 und die erste Klammer gleich vier Drittel. Die andere Klammer ist dann zwei Drittel.

Und nun zu unserem aktuellen Problem:

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}\pm\cdots=?$$

Wir gruppieren um:

$$\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\cdots\right)-\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{32}+\cdots\right)=?$$

Die beiden Klammern kennen wir aber. Wir erhalten die Differenz von vier Dritteln und zwei Dritteln, also zwei Drittel.

Ringelnatter: Danke.

Kobra: Analog können wir von links nach rechts überlegen. Das Zentrum ist also zwei Drittel von unten und zwei Drittel von links.

Viper: Das DIN-Format eines kleinen roten Rechtecks in Abbildung 7 habe ich mir nun überlegt. Recht neckisch. Ein rotes Rechteck hat $\frac{1}{9}$ der Fläche des ursprünglichen DIN A4 Papieres. Nun ist:

Format	Flächenanteil von A4
A4	1
A5	$\frac{1}{2}$
A6	$\frac{1}{4}$
A7	$\frac{1}{8}$
A8	$\frac{1}{16}$

Das kleine rote Rechteck ist flächenmäßig zwischen A7 und A8, näher bei A7, aber es geht nicht auf. Die Rechnung geht so: Das rote Rechteck habe das Format Ax. Dann muss folgendes gelten:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-4} = \tfrac{1}{9}$$

Das ist eine Exponentialgleichung mit der Lösung:

$$x = \frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 4 \approx 7.169925$$

Das kleine rote Rechteck hat also etwa das Format A 7.169925.

Ringelnatter: Den Drittelpunkt finden wir einfacher mit zwei Strichen. Das geht sogar auf zwei verschiedene Arten (Abb. 9). Die beiden Strecken sind jeweils rechtwinklig zueinander.

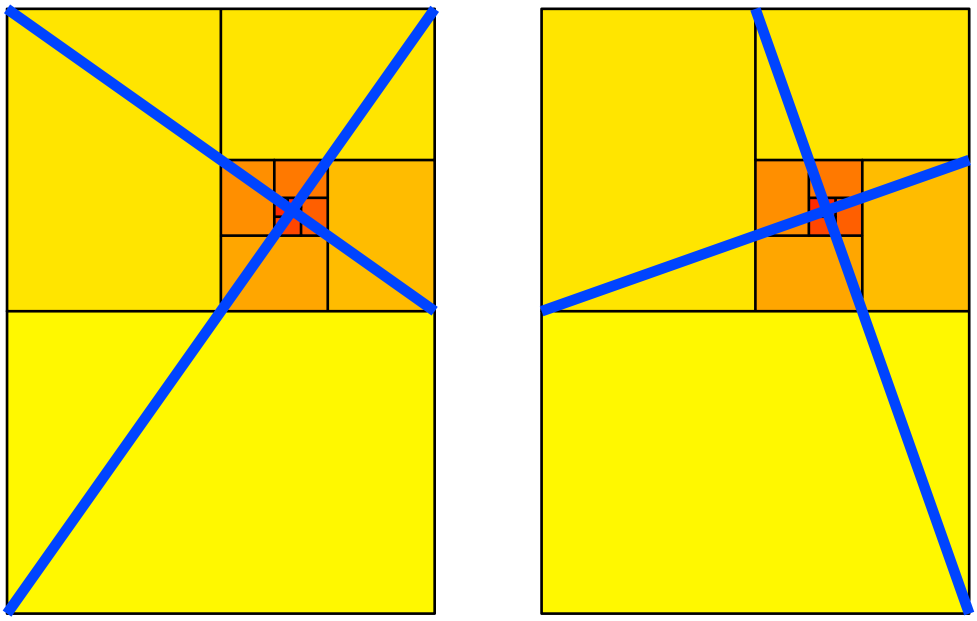

Abb. 9: Zentrum mit je zwei Strecken

KREUZOTTER: Warum sind die beiden Strecken jeweils rechtwinklig?

RINGELNATTER: Sag ich dir später. Ich gehe jetzt schlafen.

KREUZOTTER: Faules Stück. Typisch Ringelnatter.

RINGELNATTER: Na dann also gut: Die obere Hälfte ist eine verkleinerte und um 90° gedrehte Kopie des Ganzen (Abb. 10). Verkleinert wird auf $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707 \approx 70.7\%$. Das ist genau der Prozentsatz, wenn du beim Kopierer von A4 auf A5 verkleinerst. Voilà. Jetzt gehe ich aber wirklich schlafen.

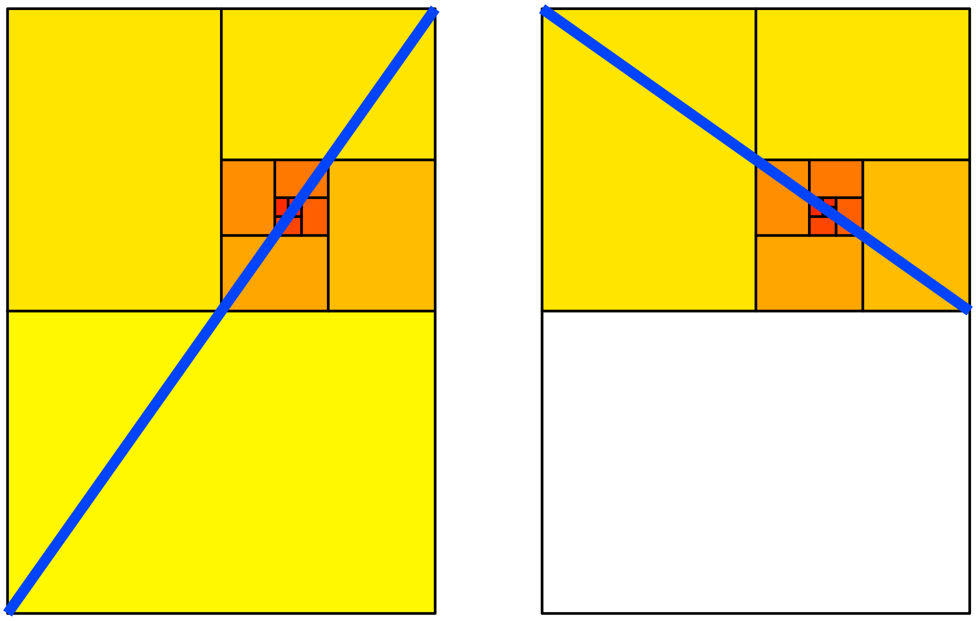

Abb. 10: Die untere Hälfte ist eine Kopie des Ganzen.

Brillenschlange: Warte noch, ich habe da eine Idee. Die Frage war doch, ob es auch andere Figuren gibt, bei denen man nach dem Halbieren zwei zur Ausgangsfigur ähnliche Figuren erhält. Dazu nehmen wir ein Origami-Papier —

Kobra: Was ist ein Origami-Papier?

Brillenschlange: Ein quadratisches Papier. Der Name kommt aus Japan. Dieses Quadrat halbieren wir längs einer Diagonalen —

Kobra: Aber hallo, dann sind die beiden Hälften ja Dreiecke und nicht ähnlich zum Ausgangsquadrat (Abb. 11)!

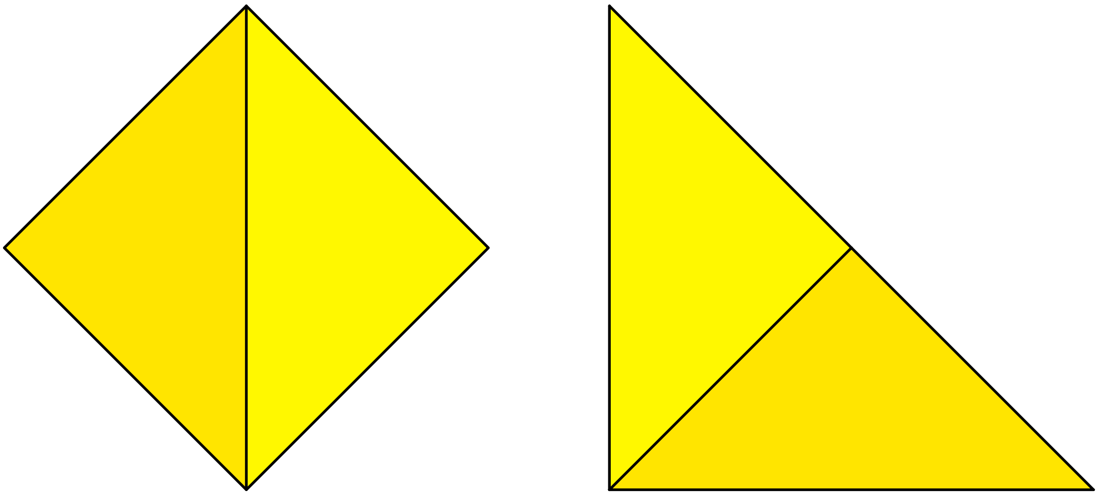

Abb. 11: Quadrat halbieren

Brillenschlange: Es geht auch nicht um das Quadrat, sondern um ein solches Dreieck, ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, wie man in der Schule sagt. Halbieren wir ein solches Dreieck längs der Symmetrieachse, erhalten wir zwei flächenmäßig halb so große rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke. Und wir können weiter halbieren (Abb. 12). Es gibt eine Zickzack-Linie mit jeweils größeren Zicks als Zacks.

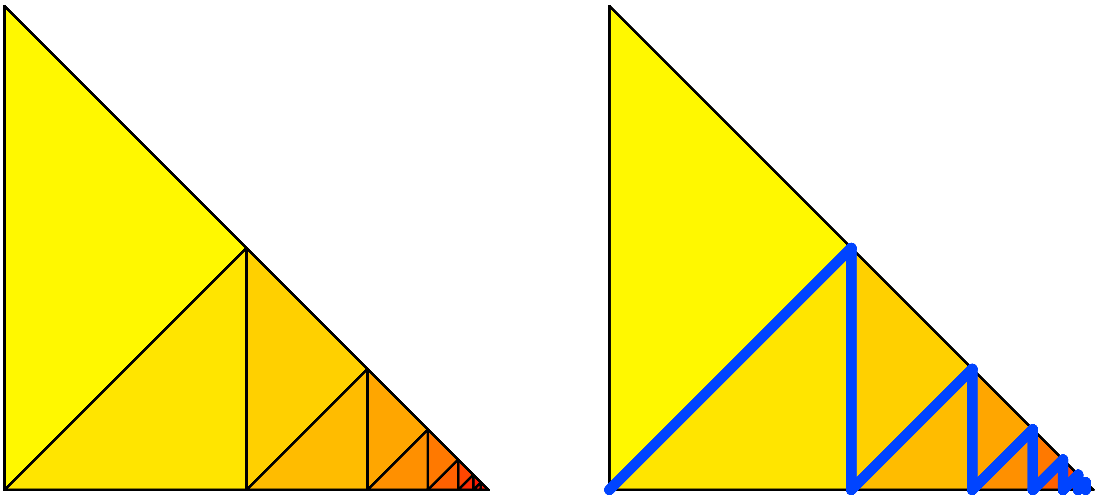

Abb. 12: Zickzack

Kobra: Kannst du es auch mit einer Spirale?

BRILLENSCHLANGE: Und ob (Abb. 13).

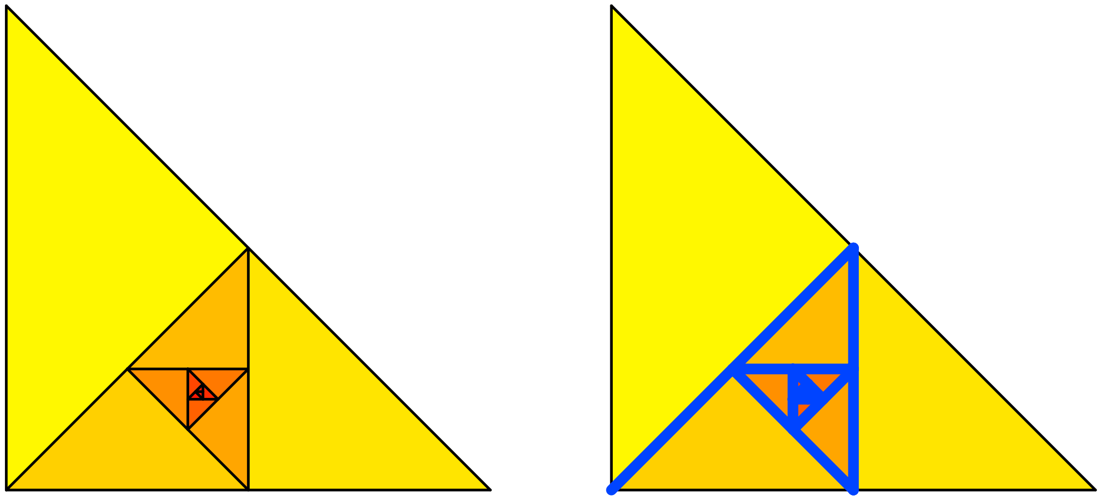

Abb. 13: Spirale

KOBRA: Und wo ist hier das Zentrum?

BRILLENSCHLANGE: Kannst du eigentlich selber beantworten.

KOBRA: Please!

BRILLENSCHLANGE: Fünfteln. Oder mit zwei Strichen (Abb. 14).

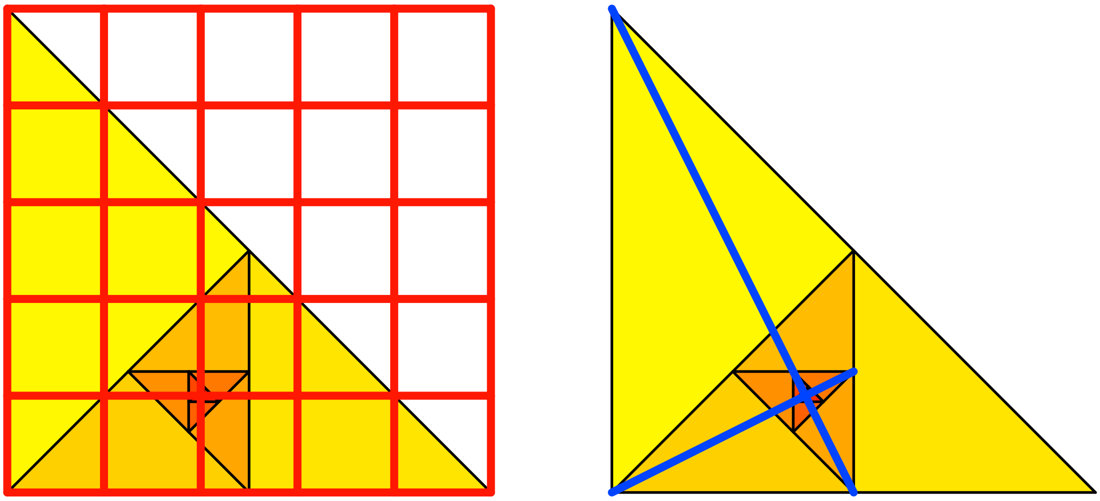

Abb. 104: Zentrum

KOBRA: Das mit den Fünfteln musst du mir vorrechnen.

BRILLENSCHLANGE: Gut. Aber nur, um dir meinen neuen Formel-Editor vorzuführen. In senkrechter Richtung gilt, von unten her gerechnet: ein Viertel, minus ein Sechzehntel, plus ein Vierundsechzigstel minus plus und so weiter.

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \mp \cdots = \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}$$

In waagerechter Richtung kannst du das nun selber.

KOBRA: Aber doch erstaunlich, dass es nun Fünftel gibt. Oben gab es Drittel.

RINGELNATTER: Ich habe eine andere Spirale gebaut (Abb. 15).

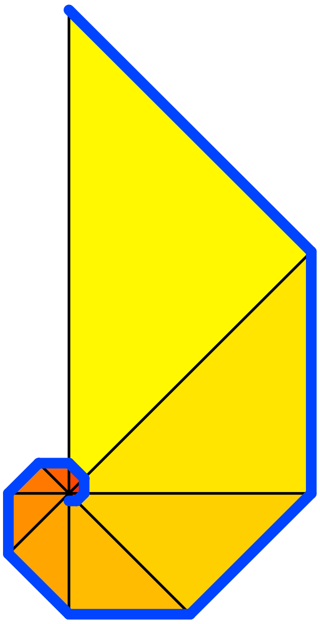

Abb. 15: Andere Spirale

KREUZOTTER: Ich auch (Abb. 16).

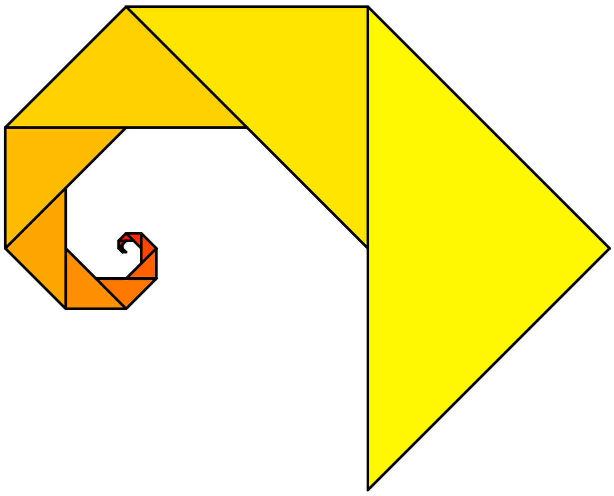

Abb. 16: Noch eine Spirale

BRILLENSCHLANGE: Du kannst vier solche Spiralen zu einem Quadrat zusammensetzen (Abb. 17).

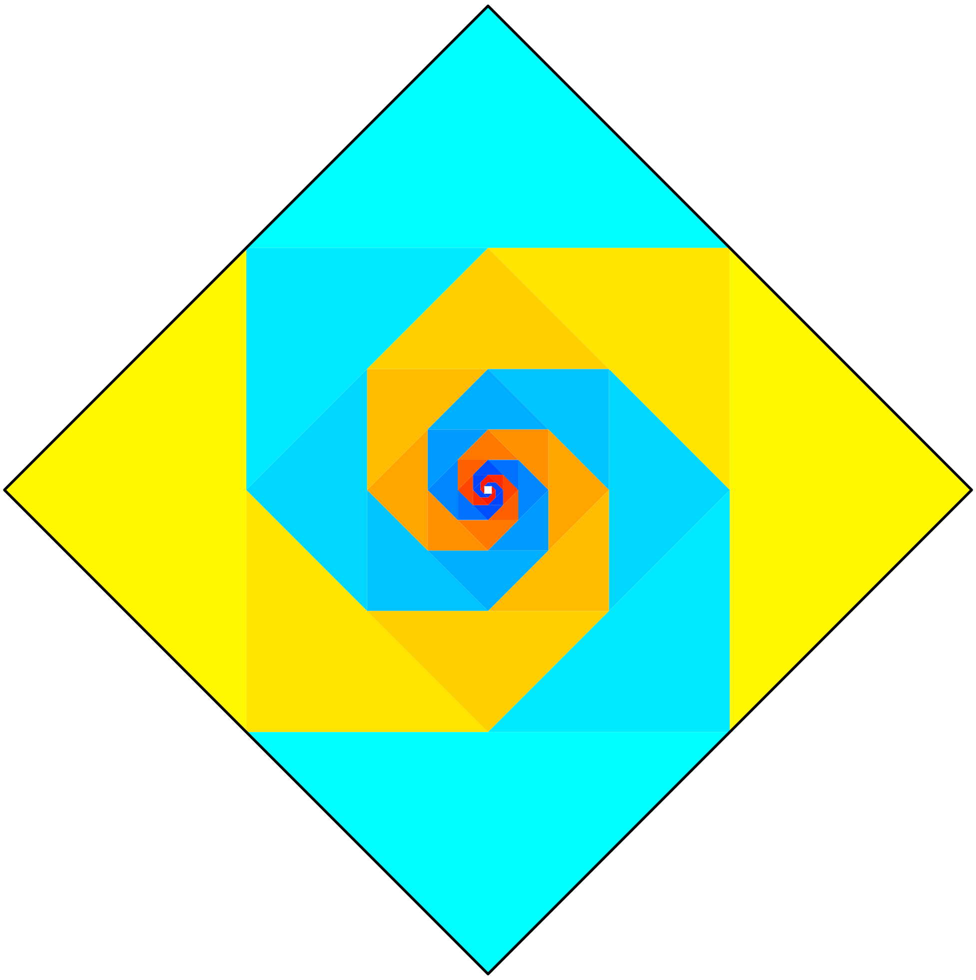

Abb. 17: Vier Spiralen

Literatur

[Heitzer 1998] Heitzer, Johanna: Spiralen, ein Kapitel phänomenaler Mathematik. Leipzig: Klett 1998. ISBN 3-12-720044-7