Hans Walser, [20180501]

DIN-Format, Goldener Schnitt und gleichseitiges Dreieck

1 Worum geht es?

Die klassische Konstruktion eines Rechtecks im DIN-Format (Walser 2013b) wird iteriert und führt zum gleichseitigen Dreieck.

Umgekehrt kommen wir vom Goldenen Schnitt (Walser 2013a) zum DIN-Format.

2 Die Konstruktion

Die Abbildung 1 zeigt eine Konstruktionsfolge.

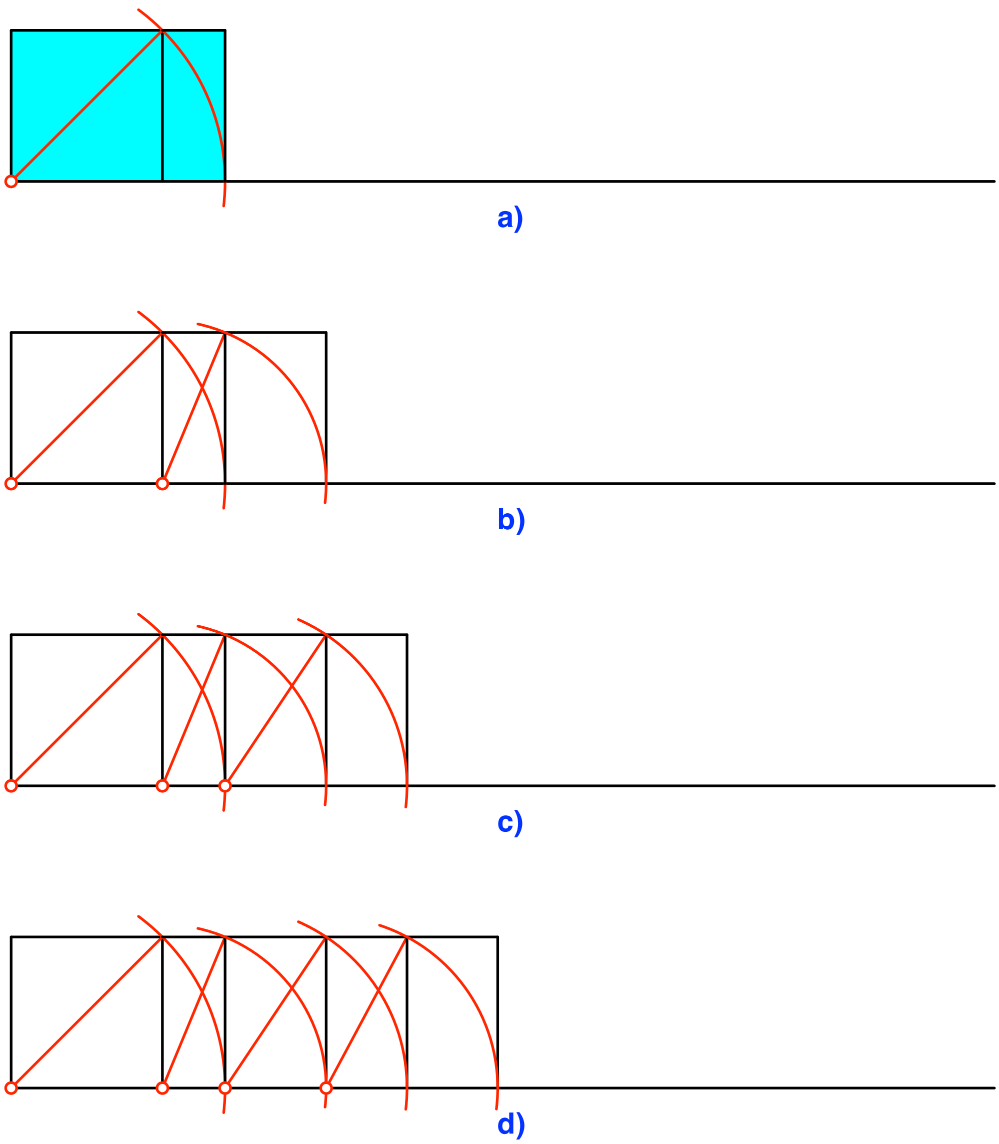


Abb. 1: Konstruktionsfolge

Die Abbildung 1a zeigt die klassische Konstruktion eines Rechteckes im DIN-Format auf der Basis eines Quadrates. Das DIN-Rechteck (hellblau) setzt sich aus dem Quadrat und dem rechts anschließenden stehenden Rechteck zusammen.

In den folgenden Abbildungen wird die Konstruktion weitergeführt.

Wir vermuten, dass sich ein konstanter Zuwachs ergibt.

Die Abbildung 2 zeigt die Situation nach einigen weiteren Schritten. Wir vermuten, dass das eingezeichnete magenta Dreieck annähernd gleichseitig ist.

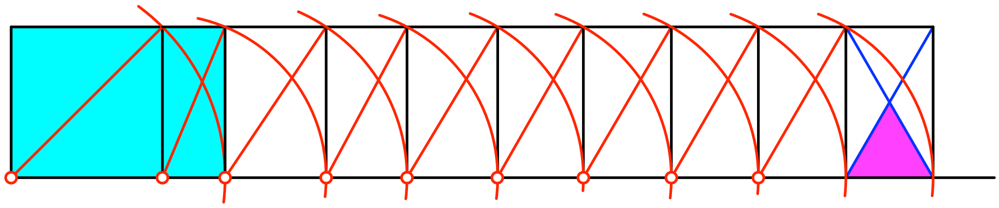


Abb. 2: Einige weitere Schritte

3 Rekursion

Wir wählen die Höhe der Rechtecke 1 und verwenden die Bezeichnungen der Abbildung 3.

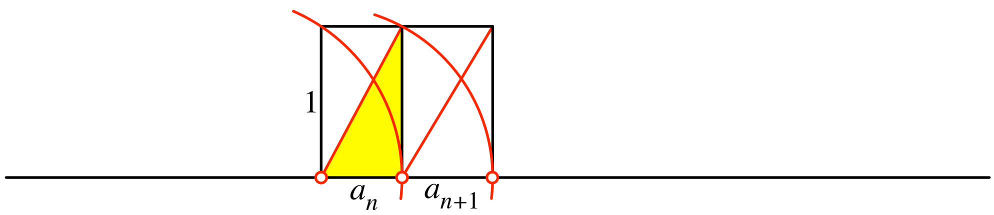


Abb. 3: Daten und Bezeichnungen

Daraus ergibt sich die Rekursion:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1} - a_n \tag{1}$$

Mit dem Startwert $a_0 = 1$ ergeben sich die ersten Werte der Tabelle 1.

n	a_n	n	a_n
0	1	10	0.577691204
1	0.414213562	11	0.577179839
2	0.668178638	12	0.577435493
3	0.534511136	13	0.577307660
4	0.599376933	14	0.577371574
5	0.566493003	15	0.577339617
6	0.582817365	16	0.577355595
7	0.574626405	17	0.577347606
8	0.578714614	18	0.577351601
9	0.576668701	19	0.577349603

Tab. 1: Die ersten Werte

Die Folge geht auf und ab, was wir auch in den Abbildungen 1 und 2 sehen.
Wir vermuten einen Grenzwert.

4 Berechnung des Grenzwertes

Wir setzen in (1) die Variable α für a_{n+1} und a_n ein und lösen nach α auf:

$$\alpha = \sqrt{\alpha^2 + 1} - \alpha \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = \sqrt{\alpha^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad 4\alpha^2 = \alpha^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 3\alpha^2 = 1 \tag{2}$$

Wir erhalten schließlich die positive Lösung:

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \approx 0.577350269189623 \tag{3}$$

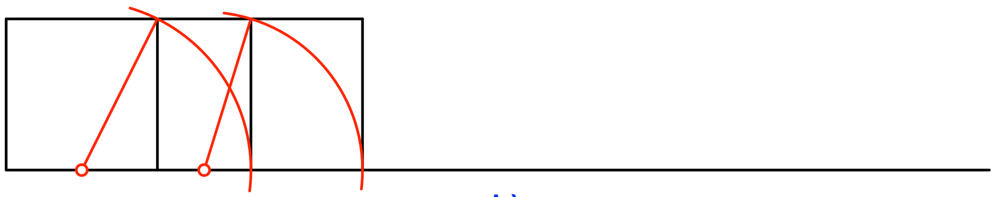
Damit ist auch die Vermutung über das annähernd gleichseitige Dreieck (Abb. 2) bewiesen.

5 Variante: Goldener Schnitt

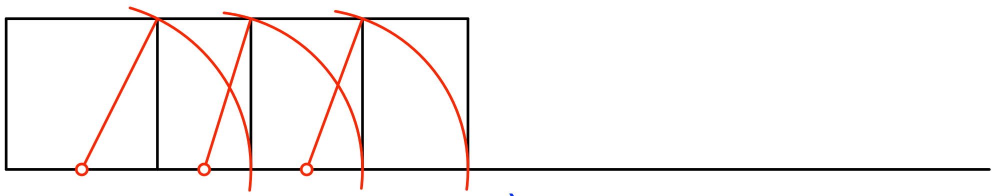
5.1 Konstruktion

Die Abbildung 4 zeigt die entsprechende Konstruktion für das Goldene Rechteck mit den Folgekonstruktionen.

a)



b)



c)

Abb. 4: Goldenes Rechteck und Folgekonstruktionen

Die Abbildung 5 zeigt einige weitere Konstruktionsschritte.

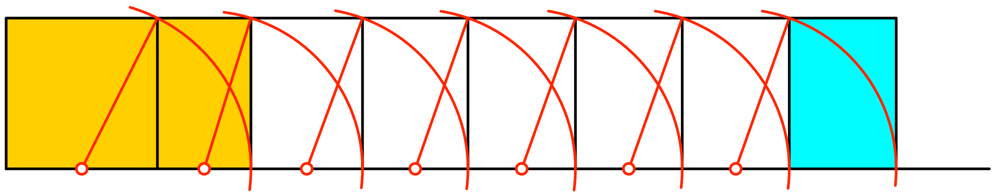


Abb. 5: Weitere Konstruktionsschritte

Wir wagen kaum zu vermuten, dass das hellblau eingezeichnete Rechteck näherungsweise im DIN-Format ist.

5.2 Rekursion und Grenzwert

Mit einer analogen Bezeichnung wie bei Abbildung 3 ergibt sich die Rekursion:

$$a_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1} - \frac{a_n}{2} \tag{4}$$

Die Tabelle 2 zeigt die ersten Werte für den Startwert $a_0 = 1$.

n	a_n	n	a_n
0	1	10	0.7071114012
1	0.6180339880	11	0.7071052414
2	0.7376403060	12	0.7071072943
3	0.6970261330	13	0.7071066098
4	0.7104776595	14	0.7071068381
5	0.7059843442	15	0.7071067620
6	0.7074810589	16	0.7071067870
7	0.7069820366	17	0.7071067795
8	0.7071483647	18	0.7071067812
9	0.7070929196	19	0.7071067814

Tab. 2: Die ersten Werte

Zur Berechnung des Grenzwertes lösen wir die Gleichung:

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1} - \frac{\alpha}{2} \tag{5}$$

Wir erhalten:

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707106781186548 \tag{6}$$

Damit ist auch die Vermutung über das DIN-Format des letzten Rechteckes bewiesen.

6 Allgemein

Wir unterteilen die Rechteckbasen von rechts her mit dem Anteil p (Abb. 6 für $p = \frac{2}{3}$). Dies gibt das Zentrum des Kreisbogens.

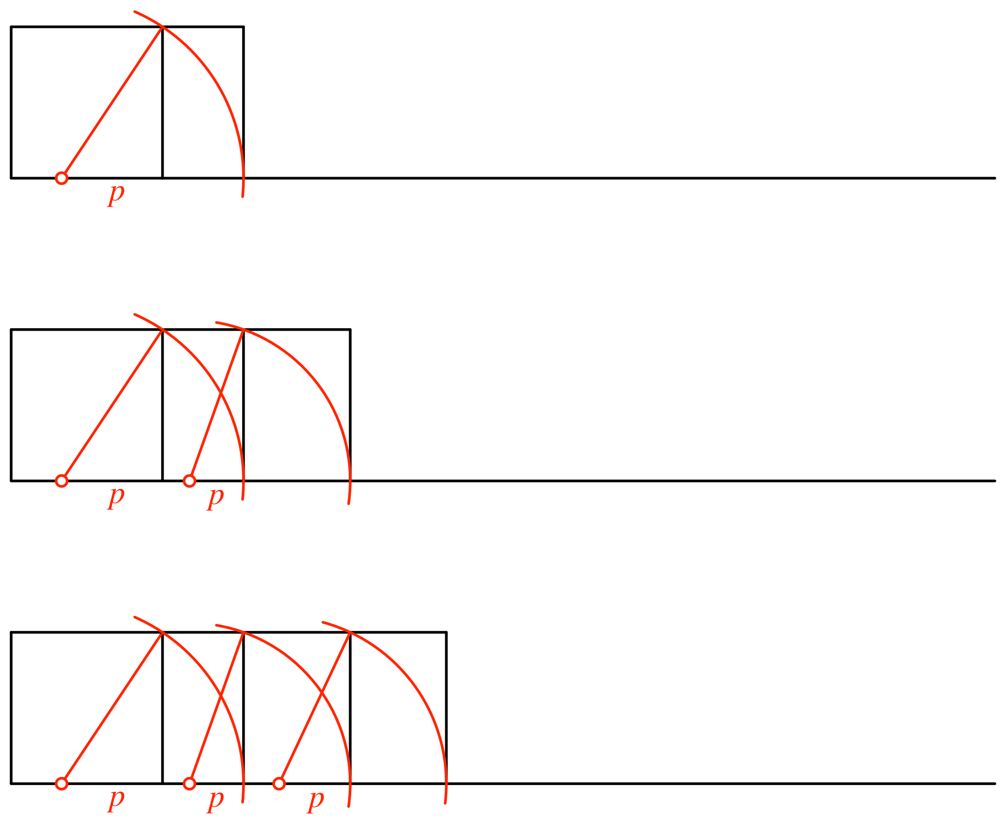


Abb. 6: Allgemein

Für die Rekursion gilt:

$$a_{n+1} = \sqrt{(pa_n)^2 + 1} - pa_n \tag{7}$$

Für den Grenzwert erhalten wir:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{1+2p}} \tag{8}$$

Literatur

Walser, H. (2013a): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.

Walser, H. (2013b): *DIN A4 in Raum und Zeit*. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-69-1.