Hans Walser, [20160604]

Chordalkreis

1 Worum geht es?

Verallgemeinerung der Chordale (Potenzgerade). Ebenfalls Verallgemeinerung des Kreises des Apollonius.

2 Potenz

Die Potenz $p(P, k(M, r))$ eines Punktes P bezüglich eines Kreises $k(M, r)$ mit Mittelpunkt M und Radius r ist gegeben durch:

$$p\left(P,k\left(M,r\right)\right)=\overline{PM}^2-r^2 \tag{1}$$

Es gilt der Satz:

Sind X und Y die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden g durch P mit dem Kreis k, so ist:

$$\overline{PX}\cdot\overline{PY}=p\left(P,k\left(M,r\right)\right)=\overline{PM}^2-r^2 \tag{2}$$

Für Punkte P außerhalb des Kreises k ist die Potenz positiv. Sie ist gleich dem Quadrat der Länge eines Tangentenabschnittes von P nach k.

Für Punkte P auf dem Kreis k ist die Potenz null.

Für Punkte P innerhalb des Kreises k ist die Potenz negativ.

3 Potenzverhältnis

Gegeben seien nun zwei Kreise $k_1(M_1(x_1, y_1), r_1)$ und $k_2(M_2(x_2, y_2), r_2)$ und ein Verhältnis v. Wir fragen nach der Menge der Punkte $P(x,y)$ mit der Eigenschaft:

$$\frac{p\left(P,k_1\right)}{p\left(P,k_2\right)}=v \tag{3}$$

In Koordinaten erhalten wir:

$$\left(\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2-r_1^2\right)=v\left(\left(x-x_2\right)^2+\left(y-y_2\right)^2-r_2^2\right) \tag{4}$$

Die Gleichung (4) ist im allgemeinen Fall eine Kreisgleichung.

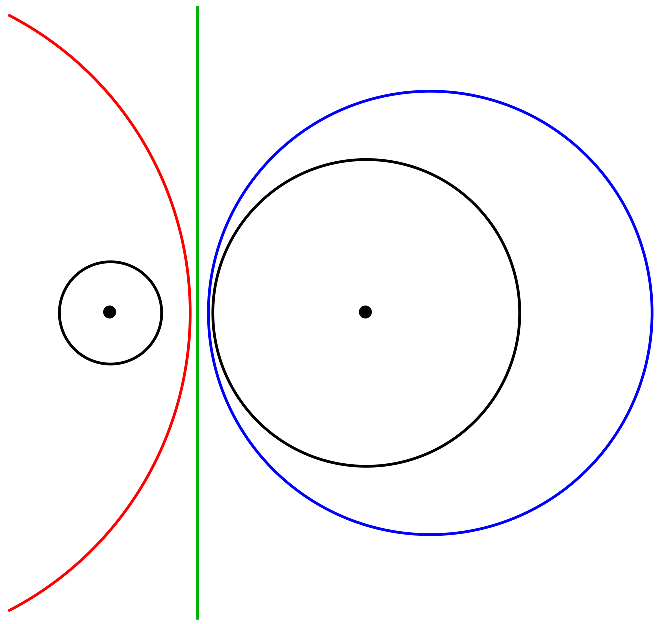
Für $v = 1$ ist (4) nur noch linear, also eine Geradengleichung.

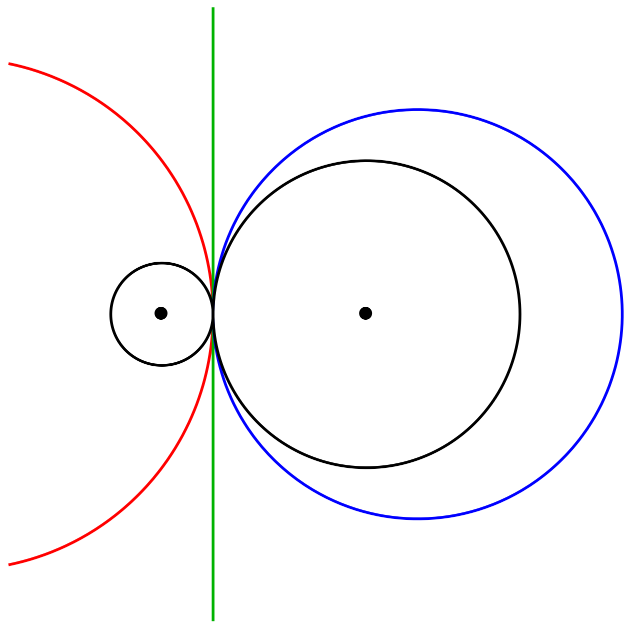
4 Chordalkreis und Chordale

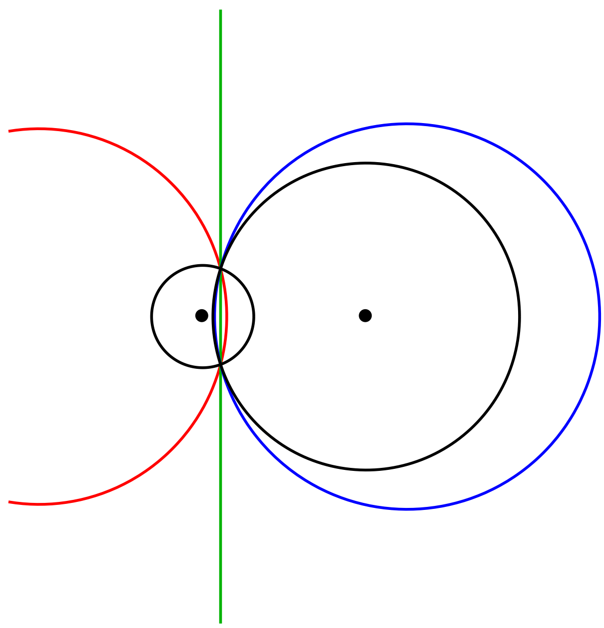
Im allgemeinen Fall beschreibt (4) einen Kreis, den *Chordalkreis*.

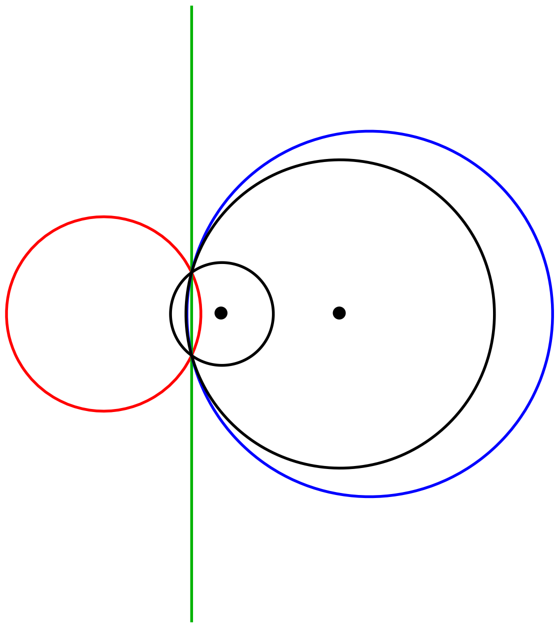
Für $v = 1$ beschreibt (4) eine Gerade, die *Chordale* oder *Potenzgerade*.

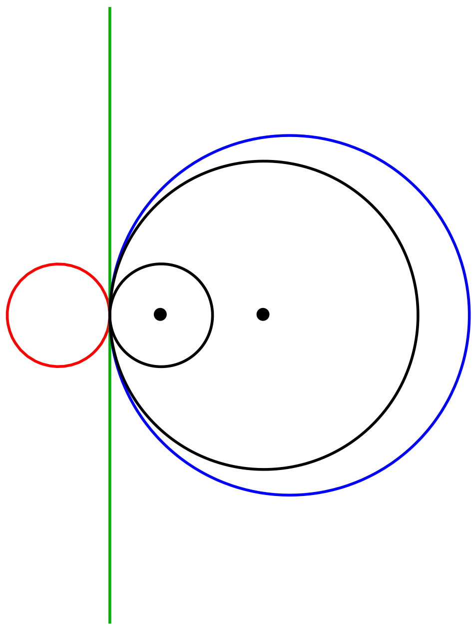
In den Beispielen der Abbildung sind jeweils ein Chordalkreis rot für $v = ½$, die Chordale grün (für $v = 1$) und ein Chordalkreis blau für $v = 5$ eingezeichnet. Die beiden gegebenen Kreise k_1 und k_2 sowie deren Mittelpunkte sind schwarz.











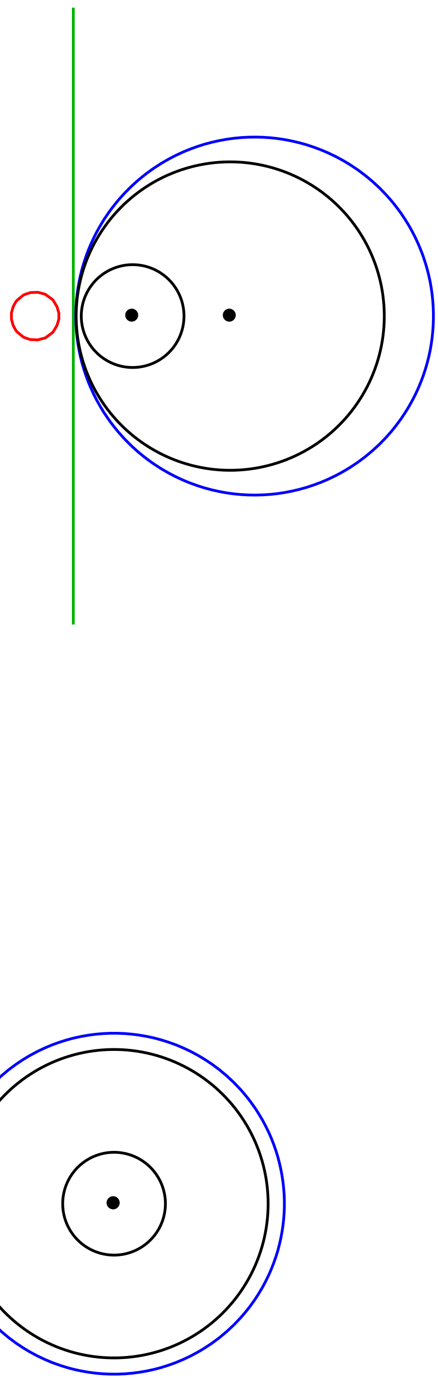


Abb. 1: Beispiele

5 Sonderfall Apolloniuskreis

Im Sonderfall $r_1 = r_2 = 0$ ergeben sich Apolloniuskreise und Mittelsenkrechte (Abb. 2).

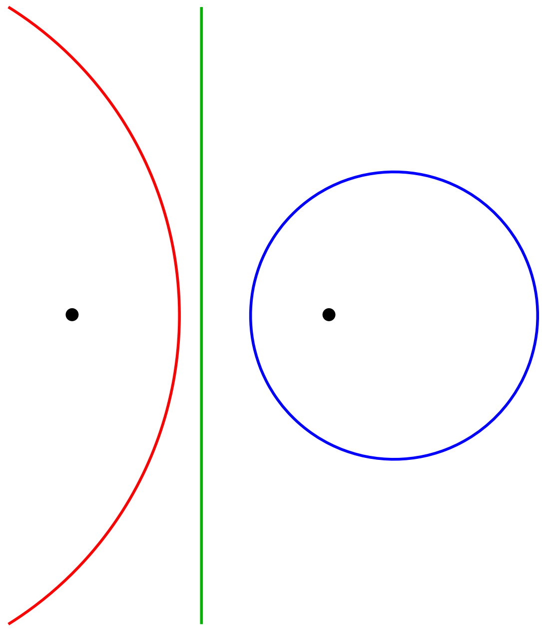


Abb. 2: Apolloniuskreise