Hans Walser, [20160533]

Chordale

Anregung: W. K., F.

1 Worum es geht

Es wird die Chordale (auch Potenzgerade oder Potenzlinie genannt) mit einigen Eigenschaften besprochen.

2 Rechnerischer Zugang

Wir wollen die Schnittpunkte zweier Kreise $k_1(M_1(x_1, y_1), r_1)$ und $k_2(M_2(x_2, y_2), r_2)$ berechnen. Sie haben die Kreisgleichungen:

$$\begin{aligned} k_1: &\quad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2 \\ k_2: &\quad (x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen (1) ergibt die lineare Gleichung:

$$-2(x_1-x_2)x+\left(x_1^2-x_2^2\right)-2(y_1-y_2)y+\left(y_1^2-y_2^2\right)=r_1^2-r_2^2 \tag{2}$$

Wir lösen (2) nach y auf, setzen in eine der beiden Gleichungen (1) ein und erhalten so eine quadratische Gleichung für die x-Werte der Schnittpunkte.

Die Sache versagt, wenn die beiden Kreise konzentrisch sind.

Die durch (2) definierte Gerade heißt *Chordale* der beiden Kreise k_1 und k_2. Die Chordale verläuft durch die beiden Schnittpunkte, daher der Name.

Addition der beiden Kreisgleichungen (1) ergibt eine neue Kreisgleichung:

$$2x^2-2(x_1+x_2)x+\left(x_1^2+x_2^2\right)+2y^2-2(y_1+y_2)y+\left(y_1^2+y_2^2\right)=r_1^2+r_2^2 \tag{3}$$

Der zugehörige Kreis hat seinen Mittelpunkt in der Mitte der Strecke M_1M_2 und verläuft durch die beiden Schnittpunkte.

Wie der durch (3) definierte Kreis heißt, weiß ich nicht.

Die Abbildung 1 zeigt ein Beispiel. Die beiden Kreise k_1 und k_2 sind blau, die Chordale rot und der durch (3) definierte Kreis magenta eingezeichnet.

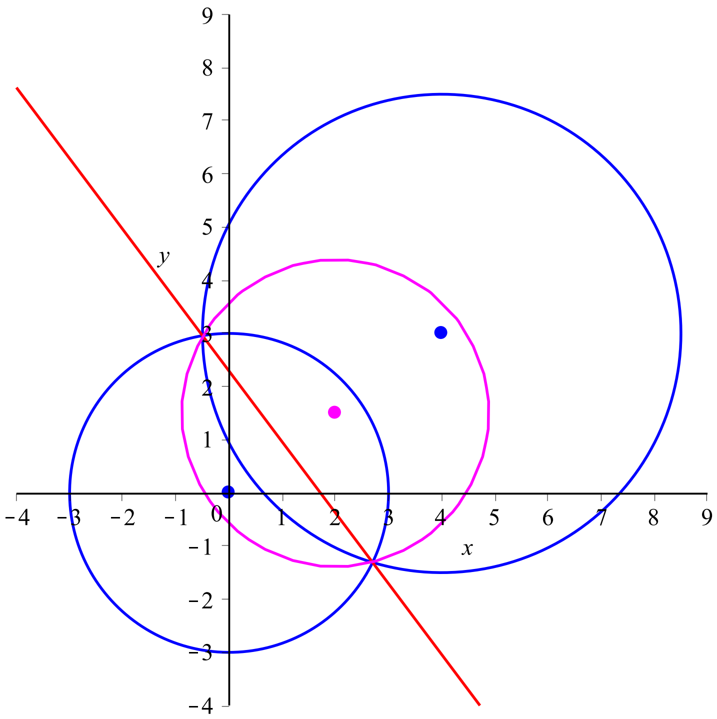

Abb. 1: Chordale

Soweit so gut. Nur haben aber zwei Kreise nicht immer zwei reelle Schnittpunkte. Die Chordale gemäß (2) existiert aber immer.

Die Abbildung 2 zeigt die Situation für zwei berührende Kreise. Die Chordale ist die gemeinsame Tangente.

Der Kreis gemäß (3) ist ebenfalls berührend.

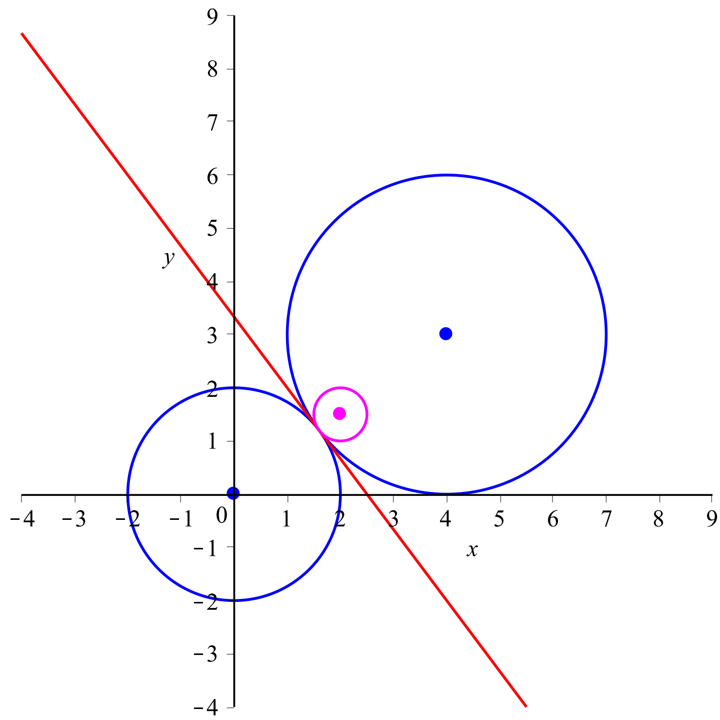

Abb. 2: Berührende Kreise

Die Abbildung 3 zeigt die Situation mit zwei nicht schneidenden Kreisen und der zugehörigen Chordalen.

Der Kreis gemäß (3) hat einen imaginären Radius.

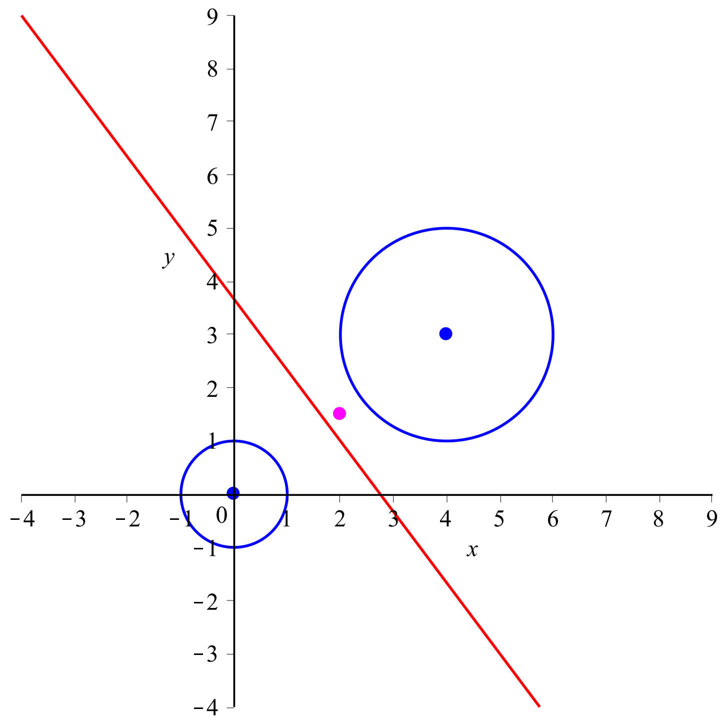

Abb. 3: Keine Schnittpunkte

3 Geometrischer Zugang

Im schneidenden und berührenden Fall sind die Konstruktionen trivial.

Aus Symmetriegründen ist die Chordale senkrecht zur Geraden durch die beiden Mittelpunkte M_1 und M_2.

Die Abbildung 4 illustriert eine Eigenschaft der Chordale, die dann auch im nicht schneidenden Fall angewendet werden kann. Wir zeichnen an jeden der beiden Kreise k_1 und k_2 eine Tangente und tragen darauf je einen gleich langen Abschnitt ab. Durch die Endpunkte der Tangentenabschnitte zeichnen wir je einen zu k_1 beziehungsweise k_2 konzentrischen Kreis. Diese beiden Kreise schneiden ebenfalls auf der Chordalen.

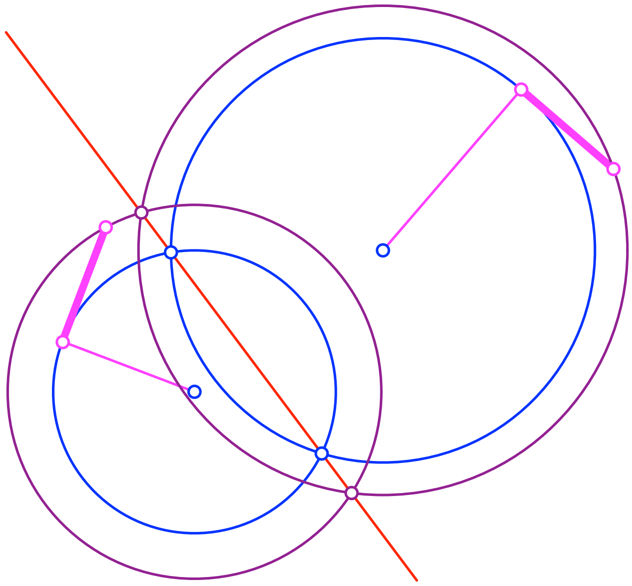

Abb. 4: Konzentrische Kreise

Im nicht schneidenden Fall können wir analog verfahren (Abb. 5). Wir müssen lediglich den Tangentenabschnitt „genügend groß“ wählen.

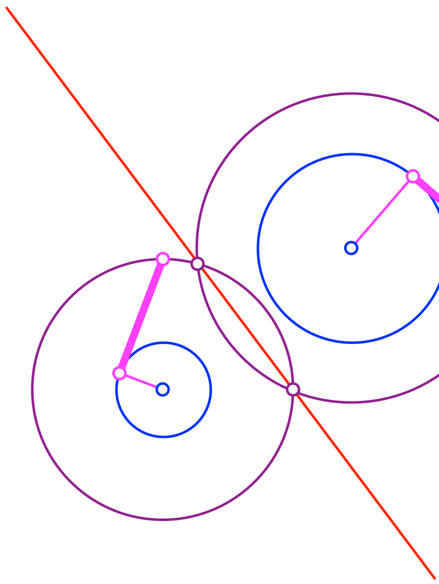

Abb. 5: Nicht schneidender Fall

Alternativ finden wir die Chordale auch durch die Mittelpunkte der Berührungspunkte gemeinsamer Tangenten (Abb. 6).

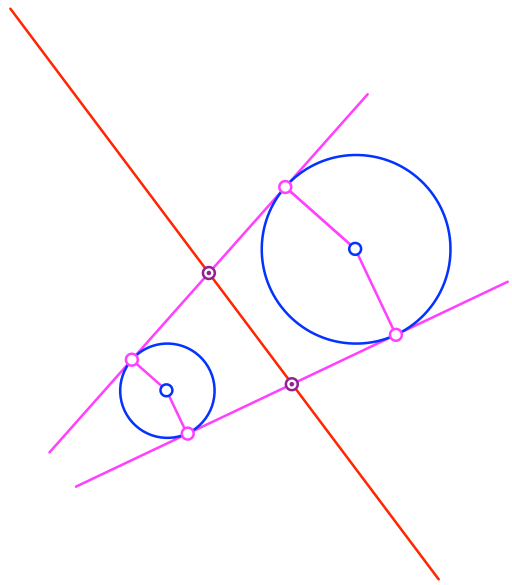

Abb. 6: Gemeinsame Tangenten

Wenn wir von einem beliebigen Punkt der Chordale aus die Tangenten an die beiden Kreise zeichnen, ergeben sich gleich lange Tangentenabschnitte (Abb. 7). Der lila Kreis ist orthogonal zu den beiden Kreisen k_1 und k_2.

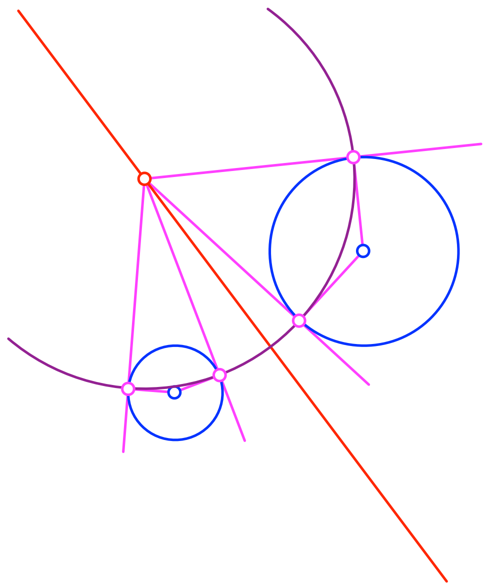

Abb. 7: Gleich lange Tangentenabschnitte