Hans Walser, [20080202a], [20131230c]

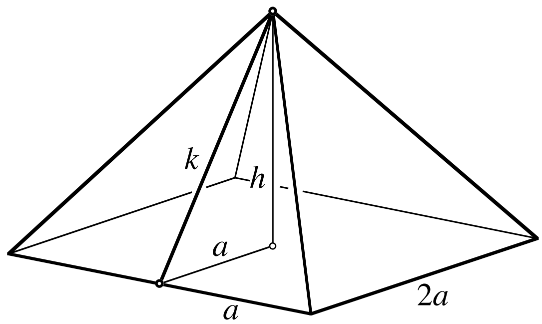
Cheops-Pyramide

Es ist immer wieder versucht worden, Schlüsselzahlen der Mathematik wie die Kreiszahl π oder den Goldenen Schnitt in den Maßverhältnissen der Cheops-Pyramide zu finden.

Im Laufe der Zeit ist diese Pyramide natürlich durch Verwitterung und menschliche Einflüsse derart erodiert dass es nicht mehr möglich ist, die ursprünglich von den Bauherren vorgesehenen Maße festzustellen.

Der Steigungswinkel der vier Seitenflächen der Pyramide wurde im frühen 19. Jahrhundert von Howard-Vyse mit 51.85° gemessen (vgl. [Bau], S. 52). Howard-Vyse verwendete dazu Verkleidungssteine, die an der untersten Schicht noch unversehrt an ihrem originalen Platz standen. Diese Steine sind in der Zwischenzeit zerstört worden, so dass eine Nachmessung nicht mehr möglich ist.

Den folgenden Rechnungen basieren auf einer Pyramide mit der Seitenlänge $2a$ an der Grundkante und der Höhe h. Ferner sei k die Höhe der gleichschenkligen Seitendreiecke.



Pyramide

Über die Maßverhältnisse bei der Cheops-Pyramide sind im Laufe der Zeit verschiedene Hypothesen entstanden. Im Folgenden werden die drei wichtigsten Hypothesen besprochen.

Rationales Verhältnis

Oft wird angenommen, dass die Steigung der Seitenflächen ein einfaches rationales Verhältnis, nämlich 28:22 ist. In diesem Falle wäre

$$h = \tfrac{14}{11} a = 1\overline{27}a$$

und

$$k = a\sqrt{1 + \left(\tfrac{14}{11}\right)^2} \approx 1.6186a\,.$$

Für den Steigungswinkel der Seitenflächen ergibt sich aus dieser Annahme:

$$\alpha_1 = \arctan\left(\tfrac{14}{11}\right) \approx 51.8428°$$

Der Goldene Schnitt

Aus dem numerischen Wert $k \approx 1.6186a$ ergibt sich die Vermutung, dass die Bauleute den Goldenen Schnitt mit $\frac{k}{a} = \tau$ in der Pyramide vermauert haben.

Für den Steigungswinkel der Seitenflächen ergibt sich aus dieser zweiten Annahme:

$$\alpha_2 = \arccos\left(\tfrac{1}{\tau}\right) = \arccos(\rho) \approx 51.8273°$$

Die Kreiszahl π

Eine weitere Hypothese ist, dass die Höhe der Pyramide gleich dem Radius des Kreises gewählt wurde, welcher den gleichen Umfang hat wie das Basisquadrat der Pyramide. Dies hieße:

$$2\pi h = 8a$$

Daraus ergibt sich:

$$h = \tfrac{4}{\pi} a \approx 1.2732a$$

Für den Steigungswinkel der Seitenflächen ergibt sich aus dieser dritten Annahme:

$$\alpha_3 = \arctan\left(\tfrac{4}{\pi}\right) \approx 51.8540°\,.$$

Vergleich

Die drei Hypothesen ergeben Steigungswinkel, die sich nur wenig unterscheiden. Sie widersprechen sich aber, und dies nicht nur numerisch. Im ersten Fall haben wir eine rationale Steigung, im zweiten Fall mit dem Goldenen Schnitt eine irrationale Steigung, und zwar eine algebraisch-irrationale Steigung, welche sich durch Wurzelausdrücke angeben lässt. Im dritten Fall mit der Kreiszahl π haben wir schließlich eine transzendent-irrationale Steigung.

Näherungswerte

Der Vergleich der drei Hypothesen führt aber auf Näherungswerte für die Kreiszahl π wie auch für den Goldenen Schnitt.

Aus der Annahme einer rationalen Steigung von 28:22 ergibt sich:

$$\frac{4}{\pi} \approx \frac{28}{22}, \text{ also } \pi \approx \frac{22}{7} = 3.\overline{142857}$$

Für viele praktische Zwecke ist dies ein recht brauchbarer Näherungswert. Ferner erhalten wir:

$$\tau \approx \sqrt{1+\left(\frac{14}{11}\right)^2} = \frac{\sqrt{317}}{11} \approx 1.6186$$

Dieser Näherungswert ist wenig sinnvoll, da τ ohnehin durch eine Quadratwurzel gegeben ist.

Hingegen können wir jetzt auch die Kreiszahl π durch den Goldenen Schnitt approximieren und umgekehrt. Aus

$$\frac{4}{\pi} \approx \sqrt{\tau^2 - 1} = \sqrt{\tau}$$

erhalten wir einerseits

$$\pi \approx \frac{4}{\sqrt{\tau}} = 4\sqrt{\rho} \approx 3.1446$$

und andererseits

$$\tau \approx \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \approx 1.6211 \quad \text{sowie} \quad \rho \approx \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx 0.6169\,.$$

Literatur

[Bau] Baumann, Jelass: Die Entfesselung des Denkens – Pythagoras. Zürich: Nimrod-Literaturverlag 2003.