Hans Walser, [20150829]

Catalan-Zahlen

1 Problemstellung

Es sollen n Elemente auf n linear angeordnete Felder verteilt werden wie folgt. Das erste Element hat freie Platzwahl. Das zweite Element hat freie Platzwahl im ersten noch freien Intervall. Das dritte und die weiteren Elemente nacheinander freie Platzwahl im jeweils ersten freien Intervall.

Bemerkung: Ohne die Einschränkung auf das erste freie Intervall ergäben sich die $n!$ Permutationen.

2 Codierung

Wir codieren die Reihenfolge gemäß Abbildung 1.

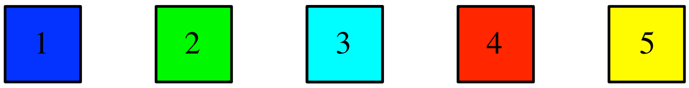

Abb. 1: Reihenfolge

3 Beispiele

3.1 Ein Element

Gibt nur eine Möglichkeit.

3.2 Zwei Elemente

Nun gibt es für das erste Element zwei Möglichkeiten. Das zweite Element hat keine Wahl mehr.

Abb. 2: Zwei Elemente

In Zahlen: [1,2] und [2,1].

3.3 Drei Elemente

Wir haben fünf Möglichkeiten.

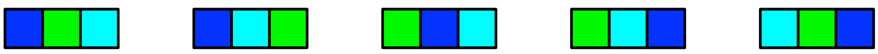

Abb. 3: Drei Elemente

In Zahlen: [1,2,3], [1,3,2], [2,1,3], [2,3,1], [3,2,1]. Hier unterscheiden sich die Anordnungsmöglichkeiten von den Permutationen. Bei den Permutationen hätten wir noch zusätzlich [3,1,2]. Das ist in unserem Fall ausgeschlossen, weil die 2 im Intervall vor der 1 stehen muss.

3.4 Vier Elemente

Es gibt 14 Möglichkeiten.

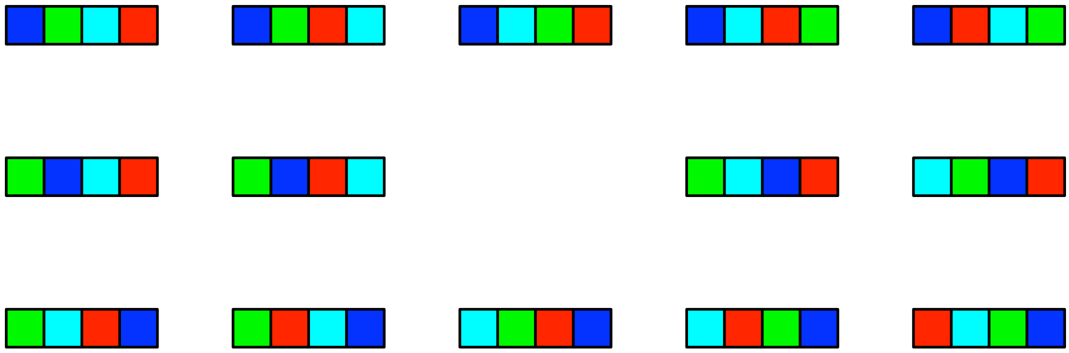

Abb. 4: Vier Elemente

Es ist $14 < 4! = 24$.

3.5 Fünf Elemente

Es gibt 42 Möglichkeiten.

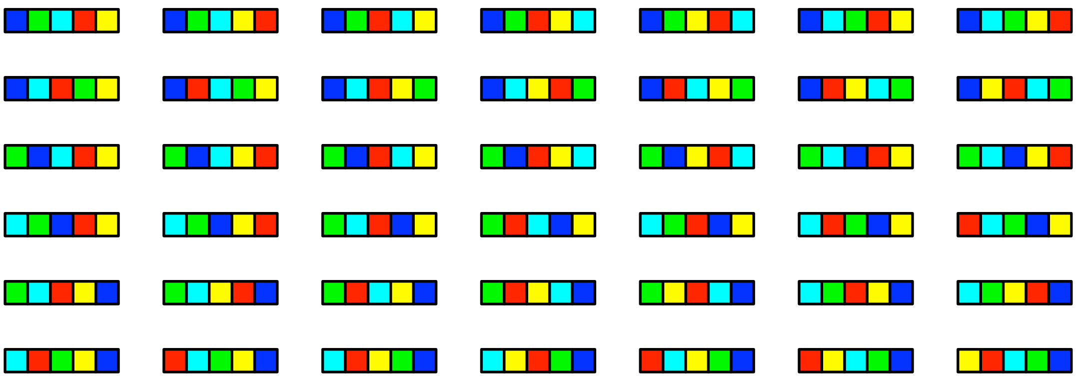

Abb. 5: Fünf Elemente

4 Allgemeine Formel

Wir bezeichnen mit C_n die Anzahl der Anordnungen von n Elementen gemäß unseren Restriktionen.

Wir setzen $C_0 = 1$, da man nur auf eine Art gar nichts tun kann.

Nun nehmen wir an, das erste Element setze sich auf die Position k. Dann müssen die nachfolgenden $k-1$ Elemente zwingend auf die $k-1$ Plätze vor dem ersten Element kommen. Dazu gibt es C_{k-1} Möglichkeiten. Die restlichen $n-k$ Elemente kommen auf die $n-k$ Positionen hinter dem ersten Element. Dazu gibt es C_{n-k} Möglichkeiten. Wenn das erste Element also die Position k wählt, gibt es insgesamt $C_{k-1}C_{n-k}$ Möglichkeiten. Somit ergibt sich die Rekursion:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k} \tag{1}$$

Zusammen mit dem Startwert erhalten wir:

n	C_n	n	C_n
0	1		
1	1	11	58786
2	2	12	208012
3	5	13	742900
4	14	14	2674440
5	42	15	9694845
6	132	16	35357670
7	429	17	129644790
8	1430	18	477638700
9	4862	19	1767263190
10	16796	20	6564120420

Tab. 1: Catalan-Zahlen

Diese Zahlen sind die Catalan-Zahlen, benannt nach Eugène Charles Catalan (1814-1894). Die Catalan-Zahlen lassen sich auch berechnen mit:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{2}$$