Hans Walser, [20230316]

Bumerang

Idee und Anregung: B. B., B. und M. S., CH.

1 Problemstellung

Die implizite Gleichung

x^(2*n) + y^(2*n) - (x^n + y^n) - c = 0

hat für c := -1/5 und n := 7 die Darstellung der Abbildung 1.

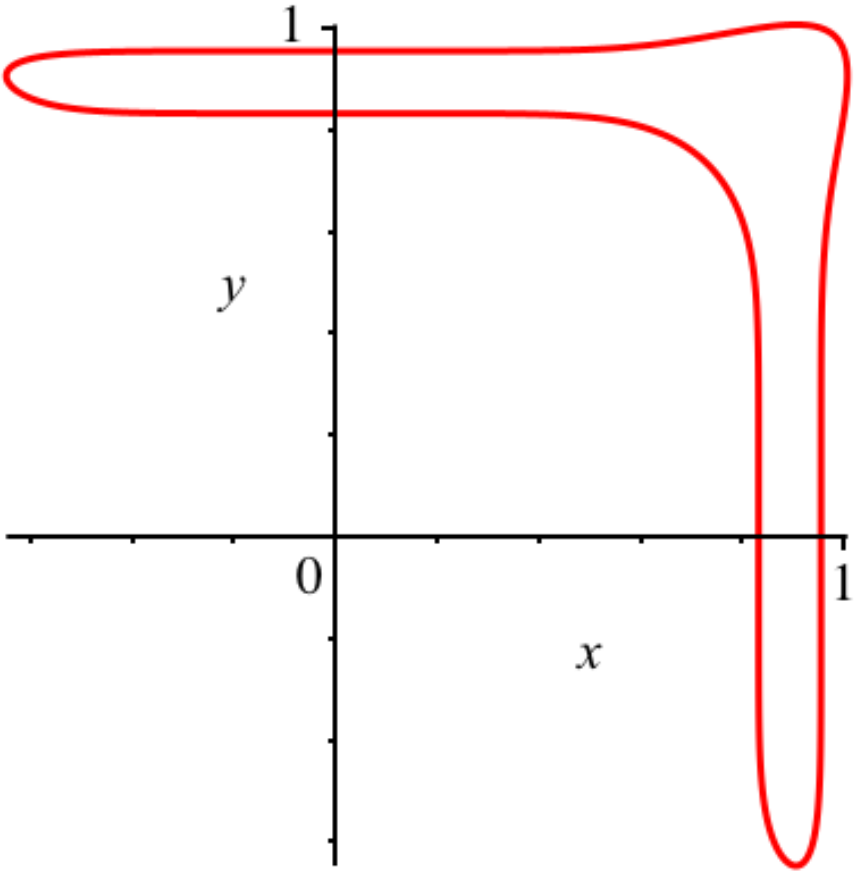

Abb. 1: Bumerang

Gesucht ist eine Polardarstellung der Kurve.

2 Bearbeitung

Der Ansatz

x := r*cos(phi), y := r*sin(phi)

ergibt für r zwei Lösungen:

r1 := ((cos(phi)^n + sin(phi)^n + sqrt(4*(cos(phi)^(2*n) + sin(phi)^(2*n))*c + (-cos(phi)^n - sin(phi)^n)^2))/(2*(cos(phi)^(2*n) + sin(phi)^(2*n))))^(1/n)

r2 := ((cos(phi)^n + sin(phi)^n - sqrt(4*(cos(phi)^(2*n) + sin(phi)^(2*n))*c + (-cos(phi)^n - sin(phi)^n)^2))/(2*(cos(phi)^(2*n) + sin(phi)^(2*n))))^(1/n)

In schönerer Schreibweise:

$$r1 := \left(\frac{\cos(\phi)^n + \sin(\phi)^n + \sqrt{4\left(\cos(\phi)^{2n} + \sin(\phi)^{2n}\right)c + \left(-\cos(\phi)^n - \sin(\phi)^n\right)^2}}{2\left(\cos(\phi)^{2n} + \sin(\phi)^{2n}\right)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$r2 := \left(\frac{\cos(\phi)^n + \sin(\phi)^n - \sqrt{4\left(\cos(\phi)^{2n} + \sin(\phi)^{2n}\right)c + \left(-\cos(\phi)^n - \sin(\phi)^n\right)^2}}{2\left(\cos(\phi)^{2n} + \sin(\phi)^{2n}\right)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Die beiden Lösungen unterscheiden sich im Vorzeichen vor der Quadratwurzel. Der Grund für die beiden Lösungen ist das Auftreten einer quadratischen Gleichung.

Wir haben also nicht *eine*, sondern *zwei* Polardarstellungen:

x1 := r1*cos(phi), y1 := r1*sin(phi)

x2 := r2*cos(phi), y2 := r*sin(phi)

In der Abbildung 2 ist die erste Polardarstellung blau, die zweite grün gezeichnet.

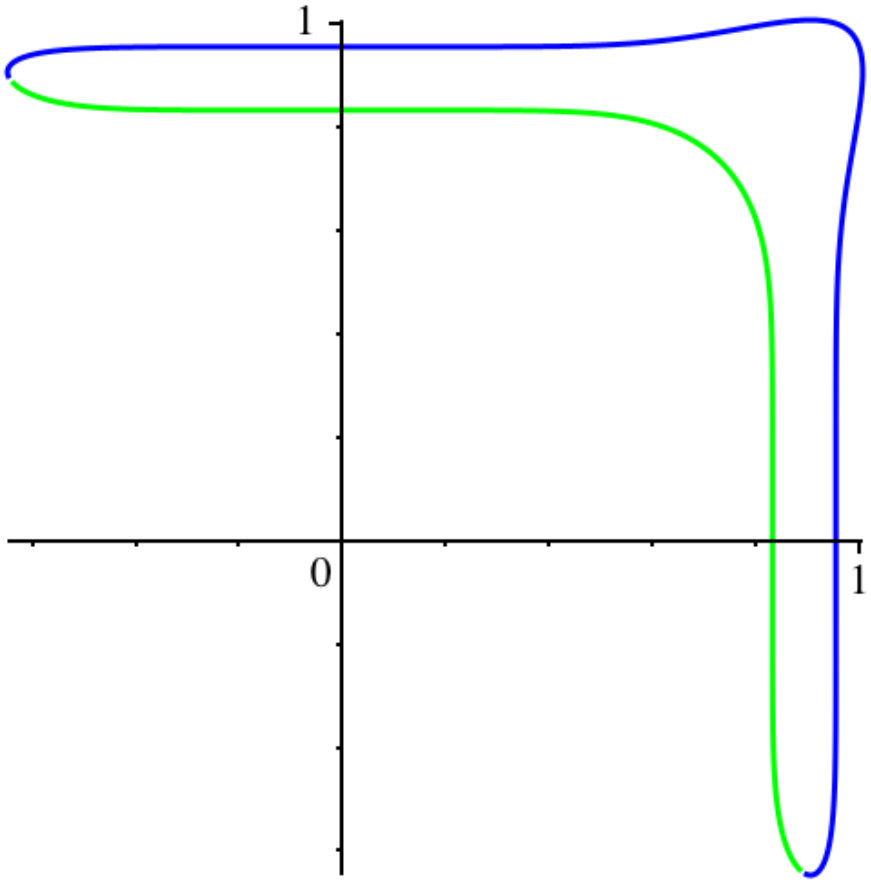

Abb. 2: Die beiden Lösungen

Die erste Lösung gibt vom Ursprung aus gesehen die Außenkontur, die zweite die Innenkontur.

3 Nur eine Polardarstellung

Um die Kurve mit einer einzigen Polardarstellung zu beschreiben, müsste das Zentrum ins Innere, zum Beispiel in den Punkt (0.9, 0.9) verlegt werden. Ich habe dies aber nicht durchgerechnet.