

Hans Walser, [20160414]

## Bumerang und Affensattel

Anregung: R. S., C.

### 1 Worum geht es?

Es werden einige Kurven und Flächen mit den impliziten Darstellungen:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^n + y^n - x^{n-1} - y^{n-1} = a \\ f(x,y,z) &= x^n + y^n + x^n - x^{n-1} - y^{n-1} - z^{n-1} = a \end{aligned} \tag{1}$$

vorge stellt.

Dabei zeigt sich ein Paritätsproblem bezüglich  $n$ .

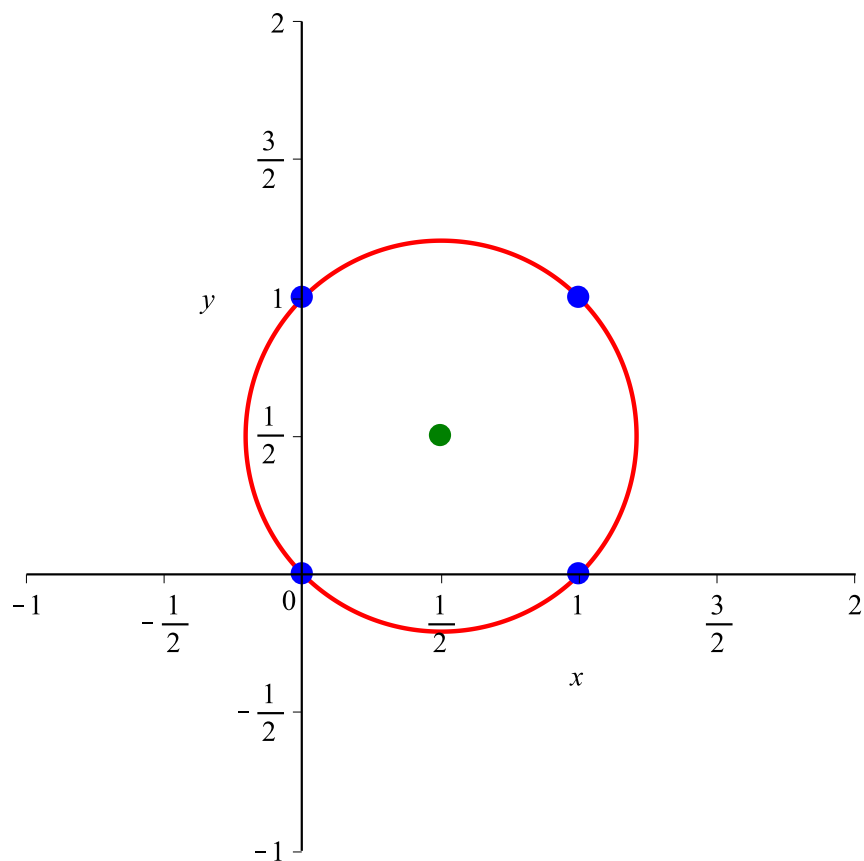
In den meisten der folgenden Beispiele wird  $a = 0$  gewählt.

Im Raum tritt ein Affensattel auf.

Die Studie zeigt nur Phänomene und ist mathematisch nicht relevant.

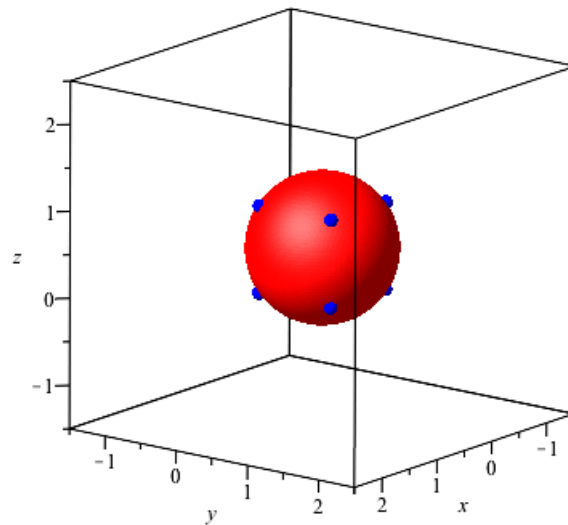
### 2 Der Klassiker

Für  $n = 2$  und  $a = 0$  erhalten wir in der Ebene den Kreis mit Zentrum  $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  und Radius  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (Abb. 1)

**Abb. 1: Kreis**

Der Kreis verläuft durch die vier Eckpunkte des Einheitsquadrates.

Im Raum ergibt sich die Kugel mit Zentrum  $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  und Radius  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (Abb. 2).

**Abb. 2: Kugel**

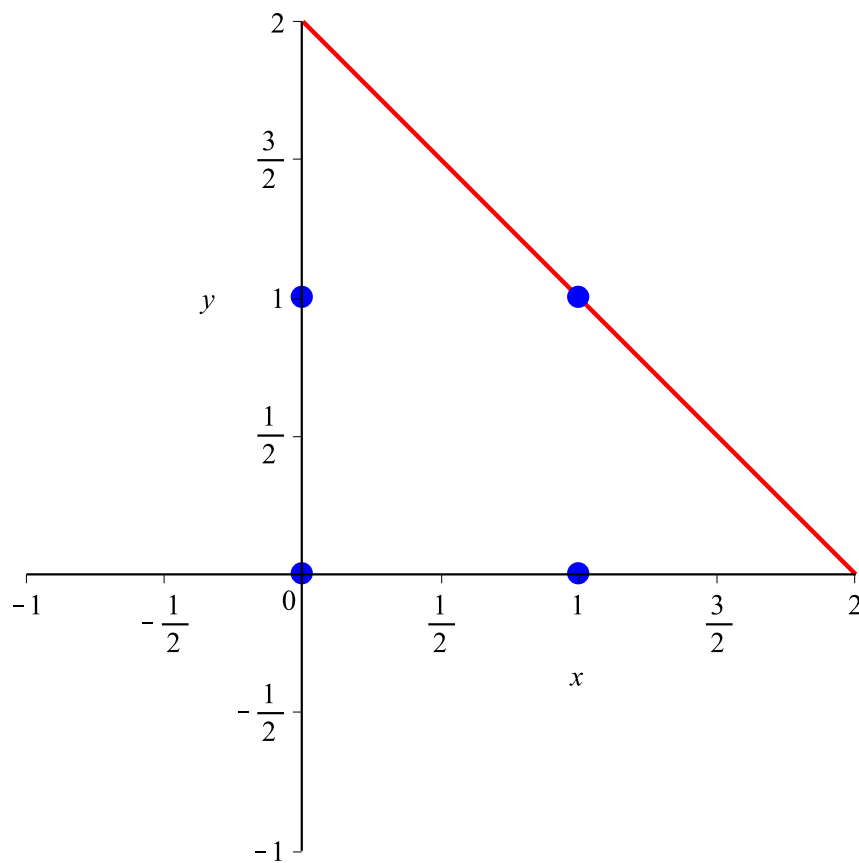
Die Kugel verläuft durch die acht Eckpunkte des Einheitswürfels.

### **3 Beispiele in der Ebene**

Es werden einige Beispiele in der Ebene vorgestellt. Wo nichts anderes vermerkt wird, ist  $a = 0$ .

#### **3.1 $n = 1$**

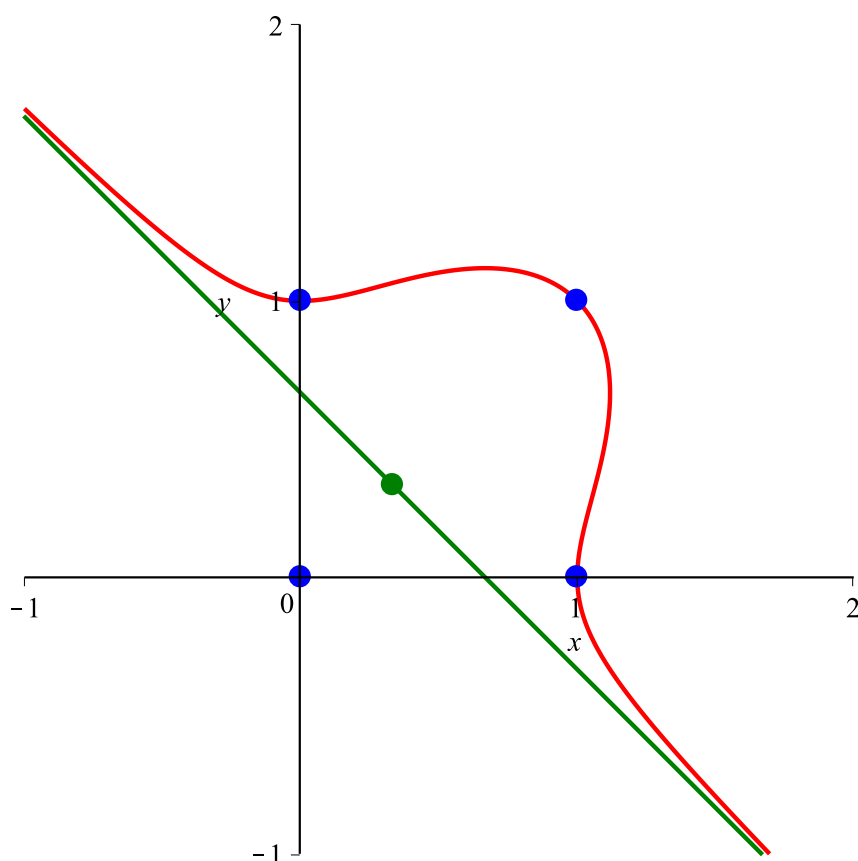
Für  $n = 1$  ergeben sich Geraden. Die Abbildung 3 zeigt die Situation für  $a = 0$ .

**Abb. 3:  $n = 1, a = 0$** **3.2  $n = 2$** 

Für  $n = 2$  ergeben sich Kreise mit dem Mittelpunkt  $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  (Abb. 1).

**3.3  $n = 3$** 

Die Abbildung 4 zeigt die Situation für  $n = 3$  und  $a = 0$ .

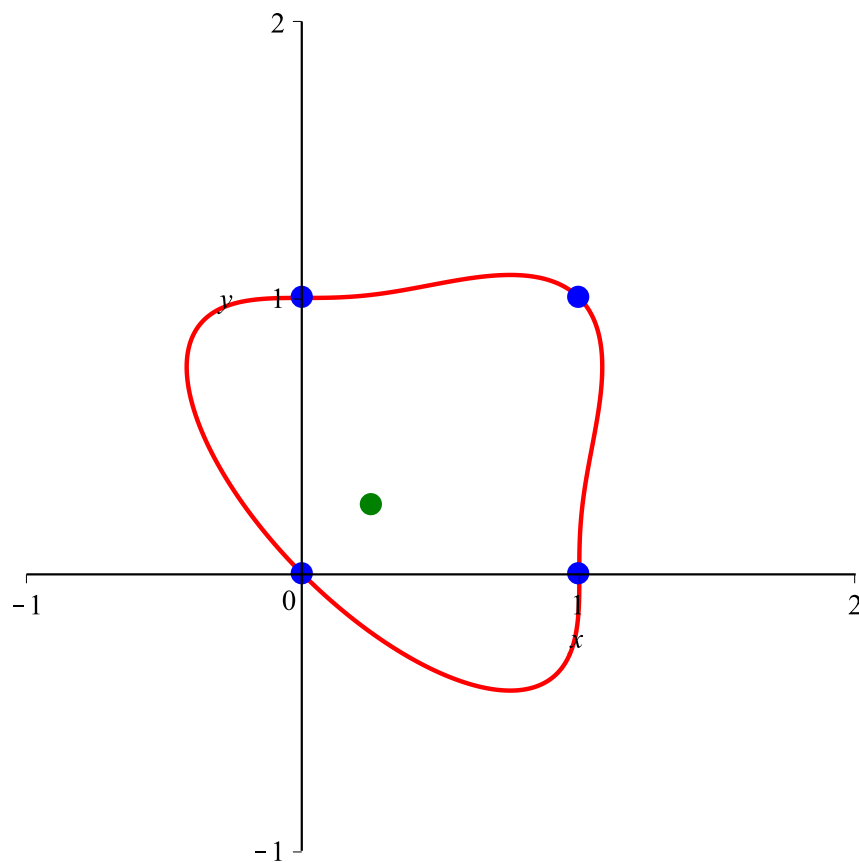


**Abb. 4:  $n = 3, a = 0$**

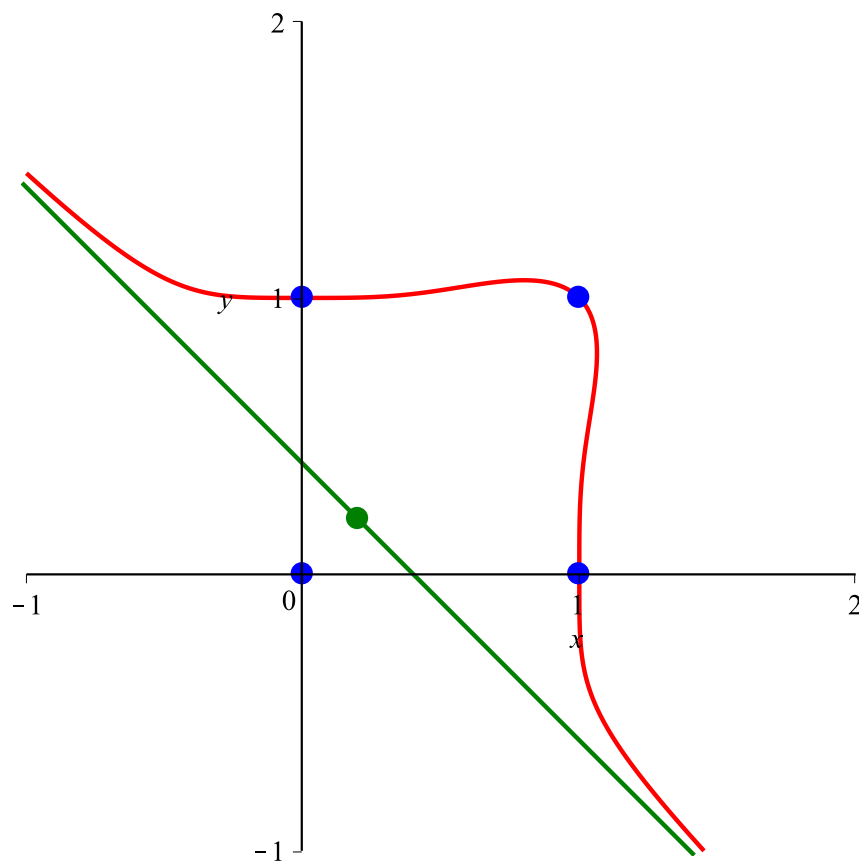
Der Ursprung gehört auch zur Lösungsmenge. Diese verläuft also durch die vier Eckpunkte des Einheitsquadrates. Ferner haben wir eine Asymptote, welche durch den Punkt  $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  verläuft und die Steigung  $-1$  hat.

### 3.4 $n = 4$

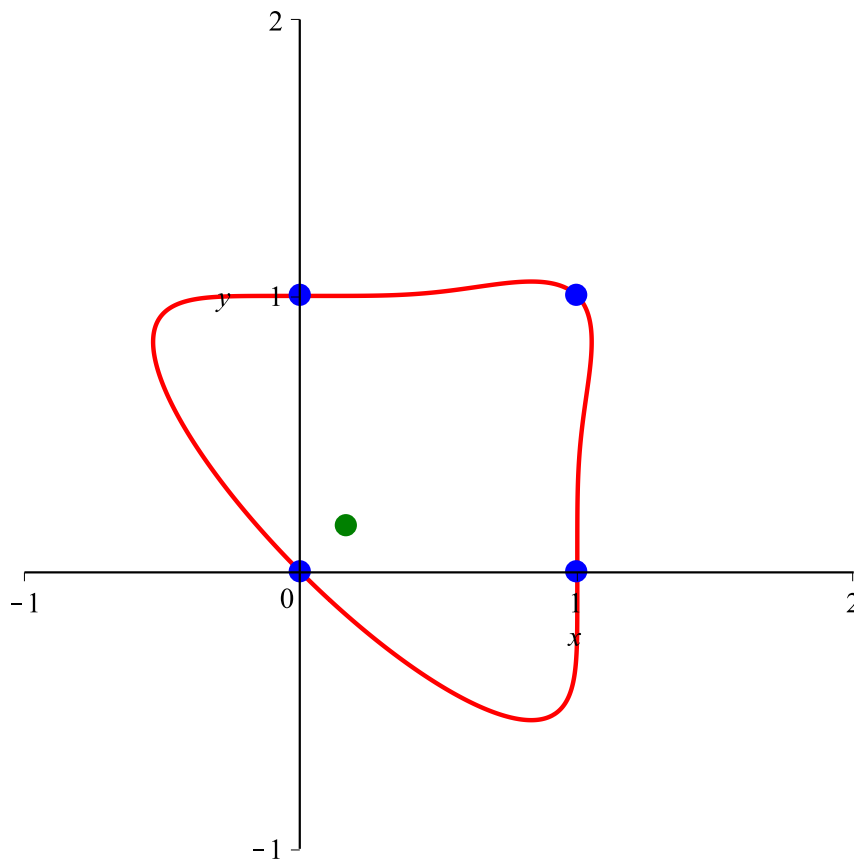
Die Abbildung 5 zeigt die Situation für  $n = 4$  und  $a = 0$ . Die Kurve ist geschlossen und verläuft durch die vier Eckpunkte des Einheitsquadrates. Die Funktion des Punktes  $M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$  ist unklar.

**Abb. 5:  $n = 4$ ,  $a = 0$** **3.5  $n = 5$** 

Für  $n = 5$  (Abb. 6) ist die Situation analog wie für  $n = 3$ .

**Abb. 6:  $n = 5$ ,  $a = 0$** **3.6  $n = 6$** 

Für  $n = 6$  (Abb. 7) ist die Situation analog wie für  $n = 4$ .



**Abb. 7:  $n = 6, a = 0$**

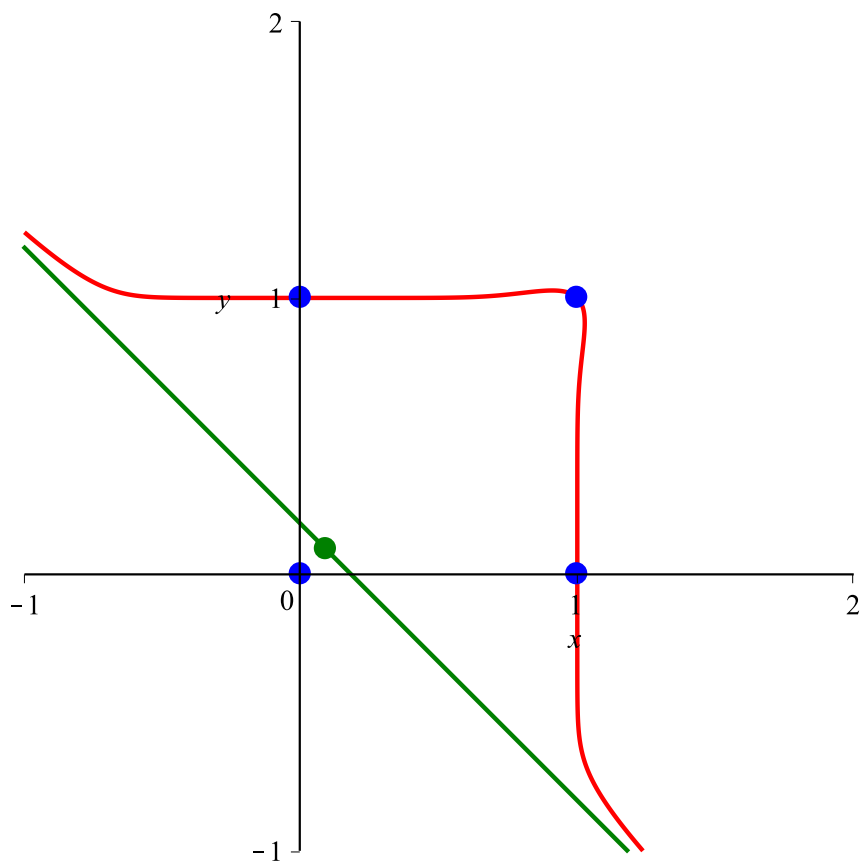
Wir merken, wie der Hase läuft.

### 3.7 Ungerades $n$

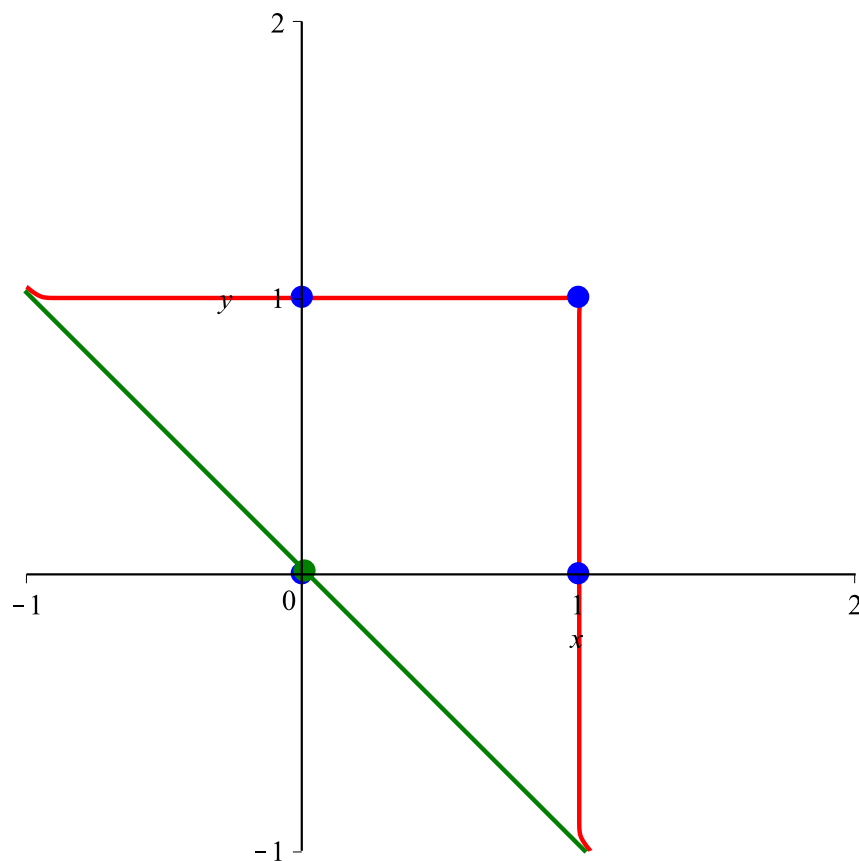
Die Lösung enthält zusätzlich den Ursprung. Sie verläuft also durch die vier Eckpunkte des Einheitsquadrates. Ferner haben wir eine Asymptote, welche durch den Punkt  $M\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$  verläuft und die Steigung  $-1$  hat.

Die Abbildungen 8 und 9 zeigen die Situation für  $n = 11$  respektive für  $n = 101$ .



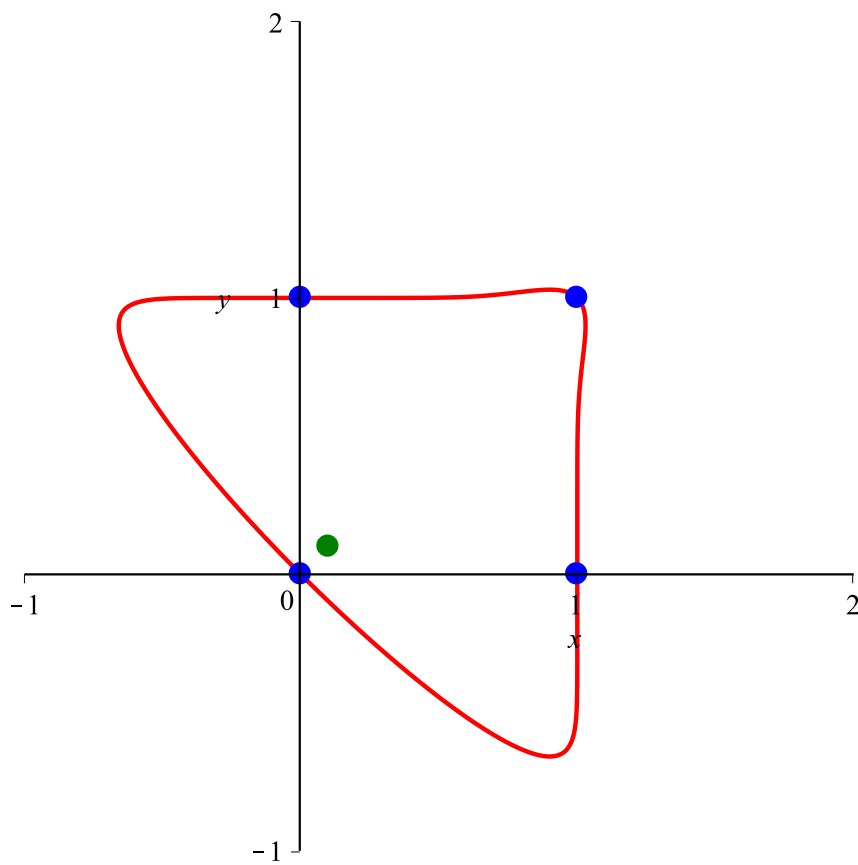


**Abb. 8:**  $n = 11, a = 0$

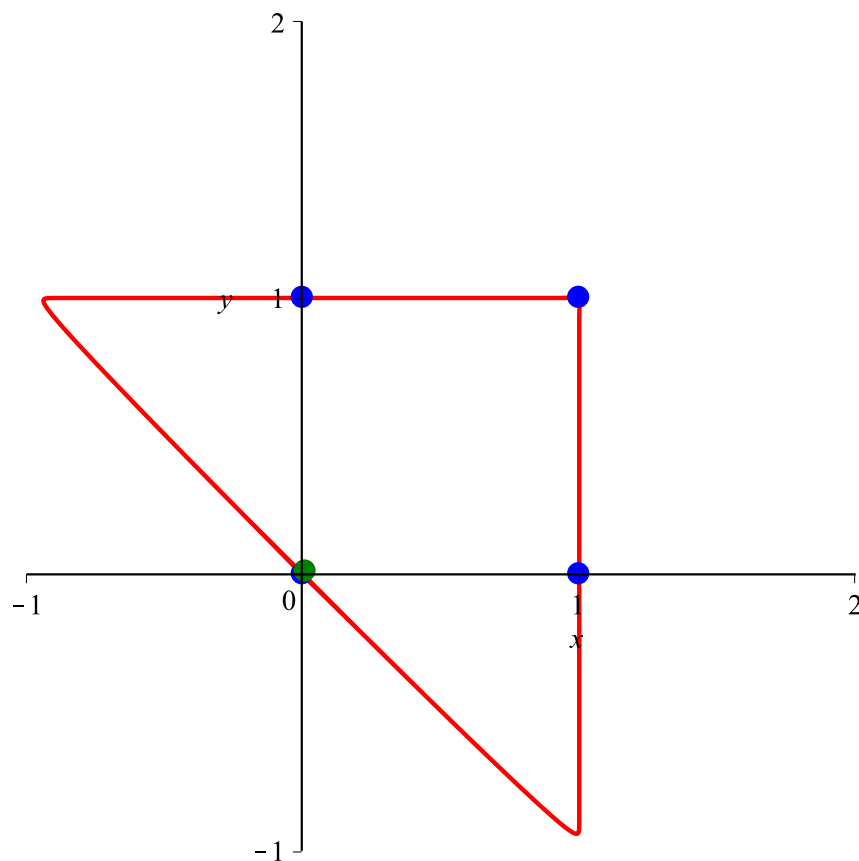
**Abb. 9:**  $n = 101$ ,  $a = 0$ 

### 3.8 Gerades $n$

Die Kurve verläuft durch die vier Eckpunkte des Einheitsquadrates. Die Abbildungen 10 und 11 zeigen die Situation für  $n = 10$  und  $n = 100$ .

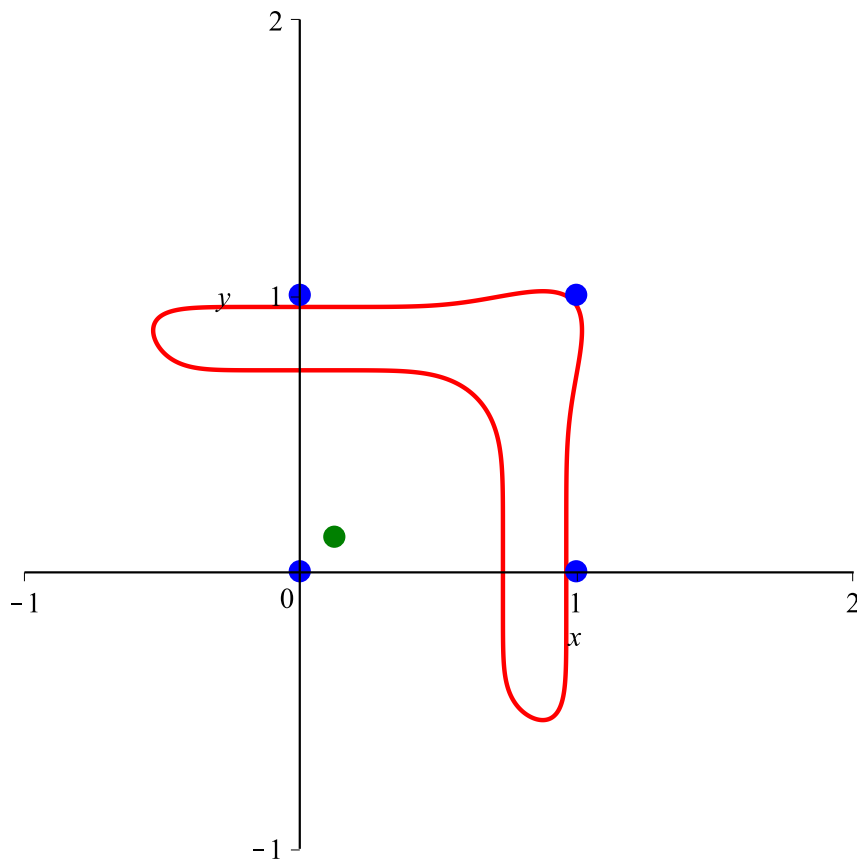


**Abb. 10:**  $n = 10$ ,  $a = 0$

**Abb. 11:**  $n = 100$ ,  $a = 0$ 

### 3.9 Bumerang

Für  $n = 8$  und  $a = -0.03$  ergibt sich die Kurve der Abbildung 12. Die Kurve verläuft nicht mehr durch die Eckpunkte des Einheitsquadrates.

**Abb. 12: Bumerang**

Es wäre jetzt allerdings falsch, von einer „Modellierung“ eines Bumerangs zu sprechen, da wesentliche physikalische und insbesondere aerodynamische Aspekte nicht berücksichtigt worden sind. Der äußere Schein der Form und die erste Assoziation begründen keine Modellierung.

#### 4 Beispiele im Raum

Nun noch einige Beispiele im Raum.

##### 4.1 $n = 1$ und $n = 2$

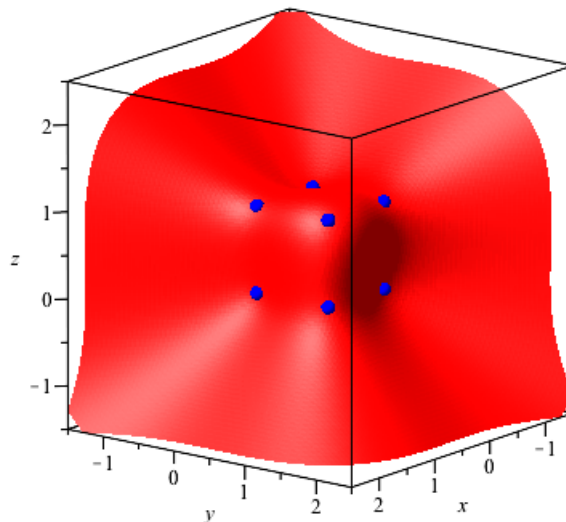
Für  $n = 1$  ergeben sich Ebenen mit dem Normalvektor

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Für  $n = 2$  und  $a = 0$  ergibt sich eine Kugel mit dem Mittelpunkt  $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  und dem Radius  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (Abb. 2). Die Kugel verläuft durch die acht Eckpunkte des Einheitswürfels.

#### 4.2 $n = 3$

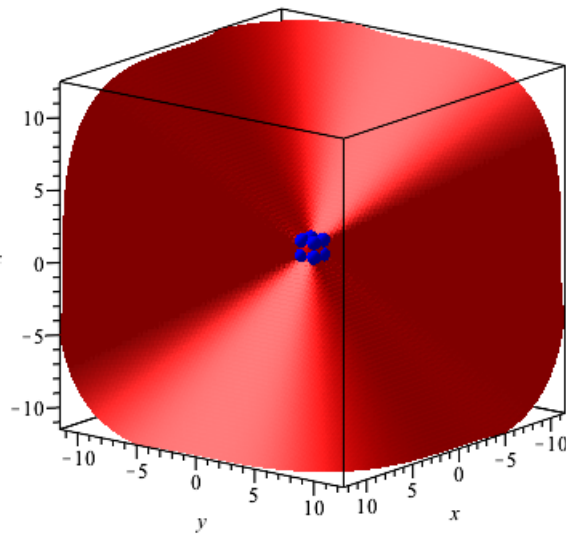
Die Abbildung 13 zeigt die Situation für  $n = 3$  und  $a = 0$ .



**Abb. 13:  $n = 3, a = 0$**

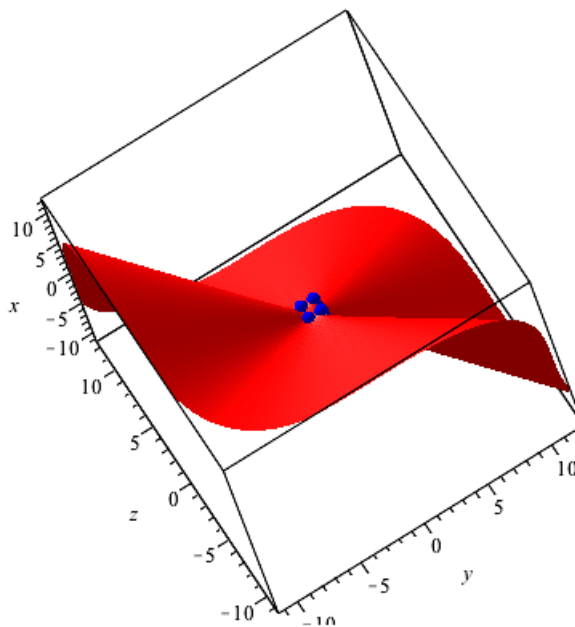
Die Fläche geht sichtbar durch sieben der acht Ecken des Einheitswürfels. Aber auch die achte Ecke (der Ursprung) ist eine Lösung, wenn auch isoliert.

Spannend ist die Frage, was „janz weit außen“ geschieht. Aufgrund der Situation in der Ebene (Abb. 4), hat der Autor eine asymptotische Ebene erwartet. Die Abbildung 14 zeigt, was wirklich geschieht.



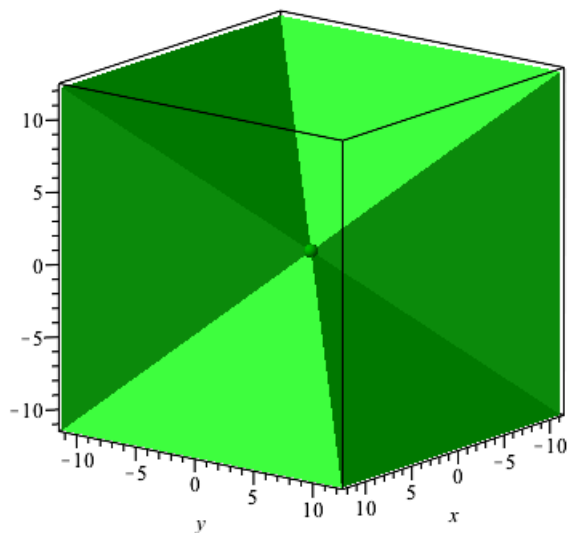
**Abb. 14: Sicht aus Distanz, Affensattel**

Die gewählte Beleuchtung zeigt, dass wir es eher mit einem *Affensattel* zu tun haben. Affensattel darum, weil der Affen zusätzlich zu seinen zwei Beinen auch den Schwanz einordnen muss. Die Abbildung 15 zeigt eine andere Sicht derselben Figur. Wir haben eine Berg- und Talbahn mit drei Bergen und drei Tälern.



**Abb. 15: Andere Sicht**

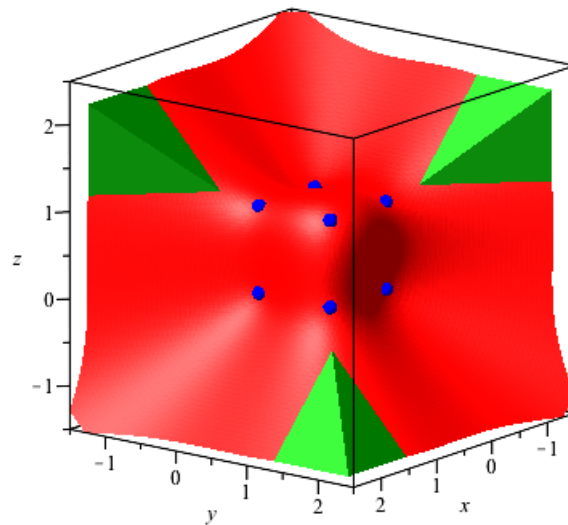
Die rote Fläche nähert sich nach außen einer aus sechs ebenen Flächenstücken zusammengesetzten Grenzfigur an (Abb. 16). Die Spitzen der Sektoren haben den Punkt  $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  gemeinsam.



**Abb. 16: Grenzfläche**

Die Abbildung 17 zeigt die Situation der Abbildung 13 zusammen mit der Grenzfigur. Die beiden Figuren durchdringen sich.



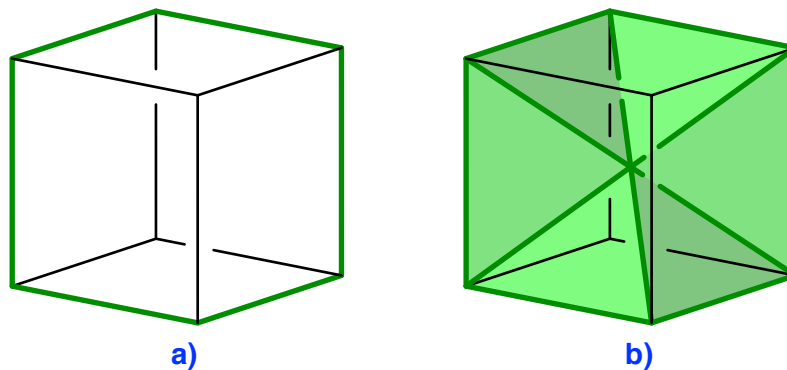


**Abb. 17: Mit Grenzfigur**

### 4.3 Die Grenzfigur für ungerades $n$

Die Grenzfigur hat folgende Geometrie.

In einem Würfel wählen wir sechs Kanten gemäß Abbildung 18a. Zwei diametrale Würfecken werden vom Kantenzug gemieden.



**Abb. 18: Grenzfigur im Würfel**

Vom Würfelmittelpunkt aus zeichnen wir nun die sechs gleichschenkligen Dreiecke mit dem Würfelmittelpunkt als Spitze und je einer dieser sechs Würfelkanten als Basis. Es entsteht ein kantiger Affensattel.

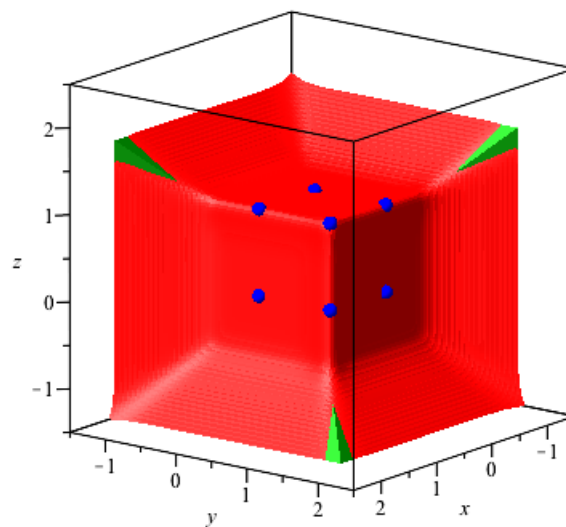
Die gleichschenkligen Dreiecke haben an der Spitze je den Winkel:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(2\sqrt{2}\right) \approx 70.5288^\circ \quad (3)$$

Dieser Winkel tritt in der Kristallografie häufig auf.

Zwei benachbarte gleichschenklige Dreiecke haben an der gemeinsamen Kante einen Schnittwinkel von  $120^\circ$ .

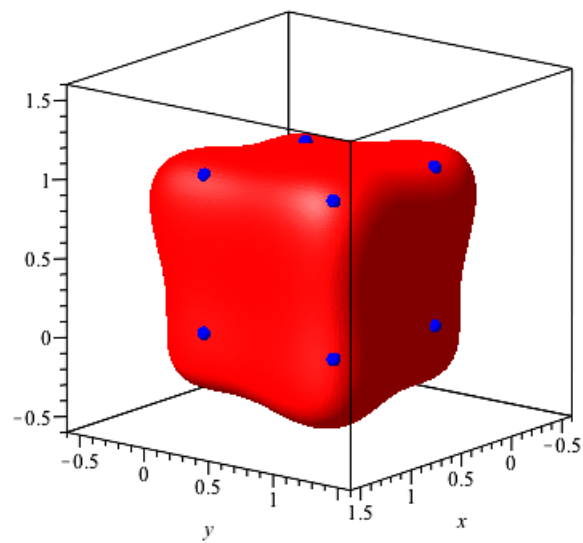
Diese Grenzfigur tritt in unserem Kontext bei allen ungeraden Zahlen  $n$  auf. Die Abbildung 19 zeigt die Situation für  $n = 11$ .



**Abb. 19:  $n = 11$ ,  $a = 0$**

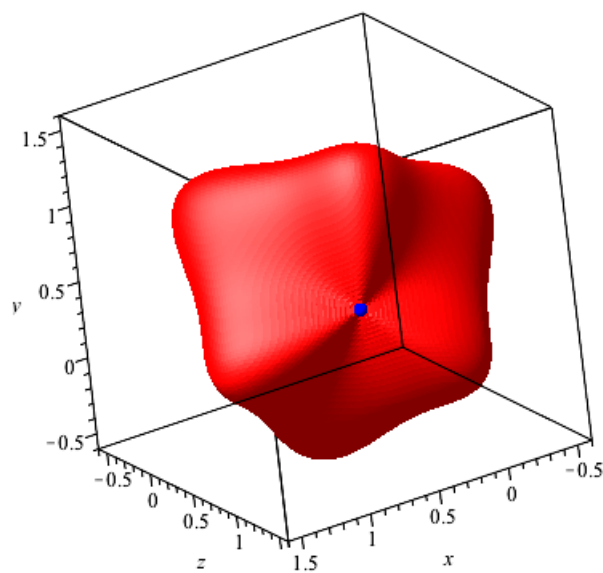
#### 4.4 Gerades $n$

Die Abbildung 20 zeigt die Situation für  $n = 4$  und  $a = 0$ .



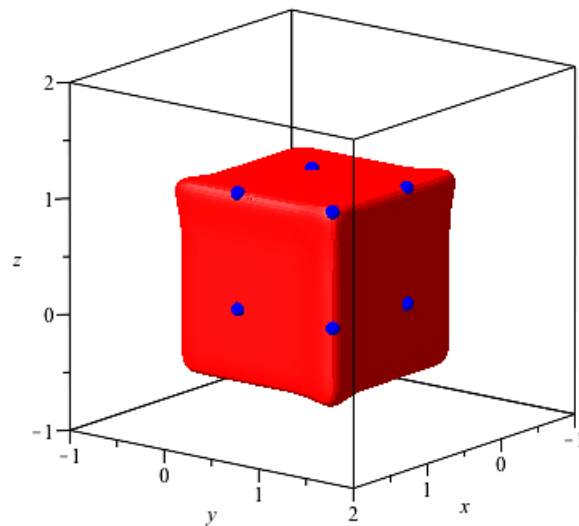
**Abb. 20:  $n = 4$ ,  $a = 0$**

Interessant ist natürlich, was an der achten Ecke des Einheitswürfels los ist. Dazu schauen wir die Figur von unten an und erkennen einen Affensattel (Abb. 21).

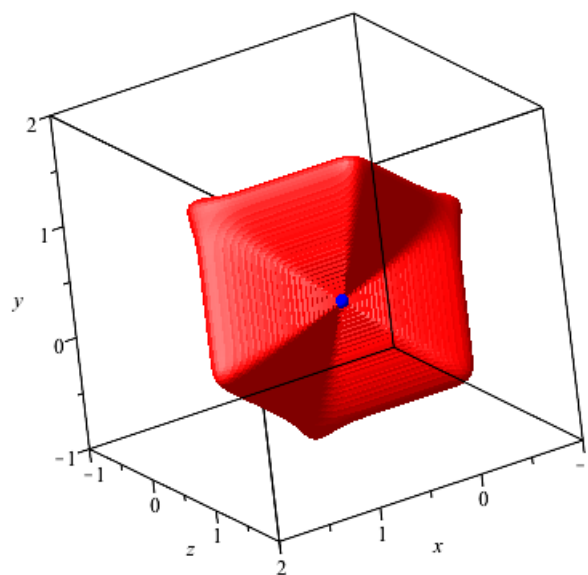


**Abb. 21: Affensattel im Ursprung**

Dieser Affensattel im achten Eckpunkt tritt bei allen geraden Zahlen  $n$  auf. Die Abbildungen 22 und 23 zeigen die Situation für  $n = 10$ .



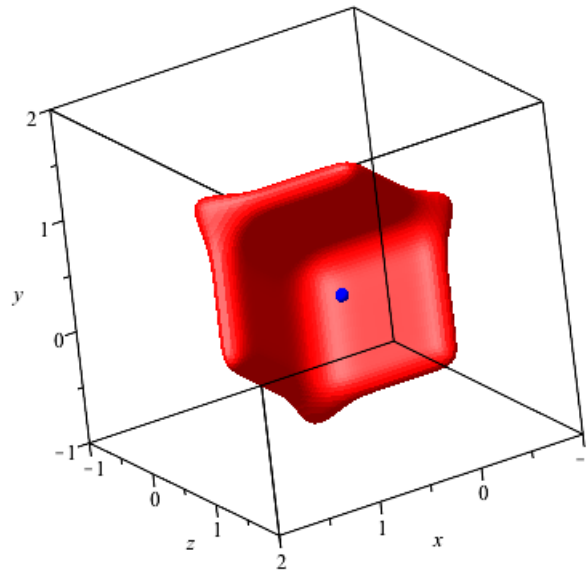
**Abb. 22:  $n = 10$ ,  $a = 0$**



**Abb. 23:  $n = 10$ ,  $a = 0$ , Affensattel**

#### 4.5 Bumerang?

Die Abbildung 24 zeigt die Figur für  $n = 8$  und  $a = -0.03$ . In der Ebene erhielten wir dafür den Bumerang (Abb. 12).



**Abb. 24: Bumerang?**