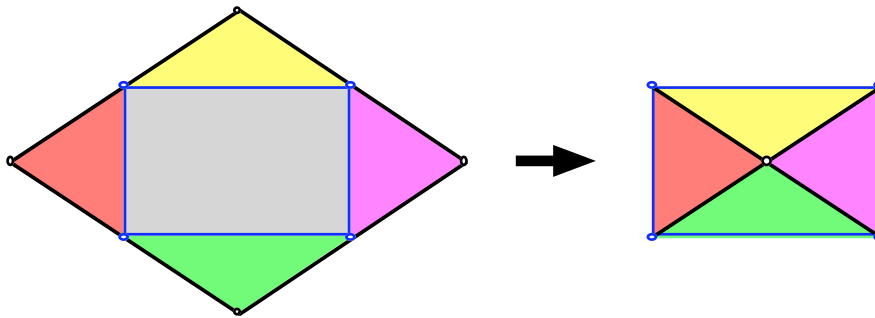


Briefumschlag

1 Worum es geht

Wenn wir bei einem Papier-Rhombus die vier Ecken in die Mitte einfalten, entsteht ein Briefumschlag (von den Klebefalzen wird abgesehen).



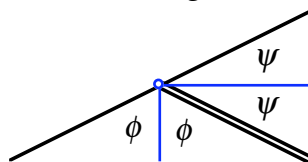
Rhombus und Briefumschlag

Gibt es andere Papier-Vierecke, mit denen sich überlappungsfrei und lückenlos ein Briefumschlag herstellen lässt?

Ist dies insbesondere mit einem Rechteck möglich?

2 Das Briefumschlag-Rechteck

Zunächst ist nicht gesagt, dass das Briefumschlag-Viereck ein Rechteck sein soll. Es ist lediglich ein dem ursprünglichen Papier-Viereck eingeschriebenes Viereck. Da das Einfalten aber lückenlos und überlappungsfrei geschehen soll, haben wir an jeder Ecke des Briefumschlag-Viereckes die Situation der folgenden Figur.



Situation an einer Ecke des Briefumschlages

Da die ursprüngliche Papierkante glatt ist, haben wir $\phi + \phi + \psi + \psi = 180^\circ$ und daher $\phi + \psi = 90^\circ$. Der Briefumschlag wird also rechteckig.

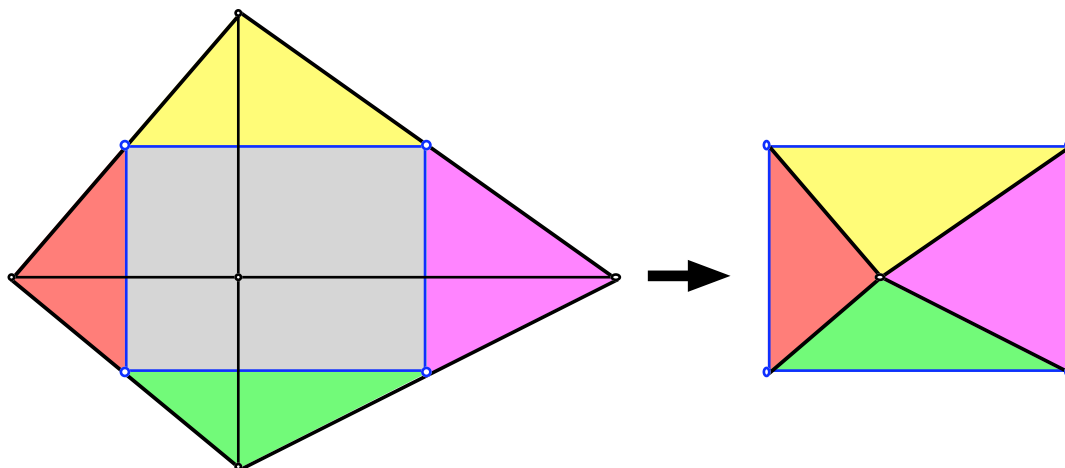
3 Zwei Fälle

Es gibt nun zwei Fälle je nachdem, ob alle vier Ecken des Papier-Viereckes nach dem Einfalten in einem Punkt zusammen kommen, oder ob das nur jeweils zwei im Papier-Viereck benachbarte Ecken tun.

Wenn zwei benachbarte Ecken des Papier-Viereckes nach dem Einfalten zusammen kommen, wird der Mittelpunkt der Papierkante zwischen diesen Ecken eine Ecke des Briefumschlag-Rechteckes.

3.1 Alle vier Ecken in einem Punkt

Dies ist genau dann möglich, wenn die Diagonalen des ursprünglichen Papier-Viereckes orthogonal sind.

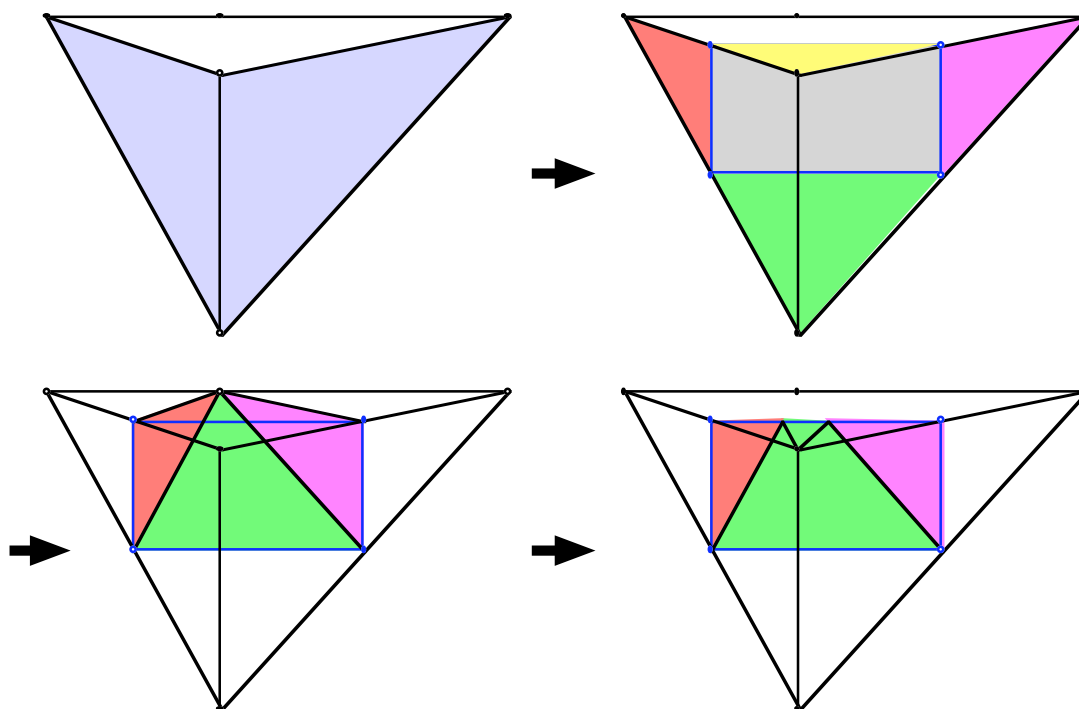


Viereck mit orthogonalen Diagonalen

Überlegung: Dass es geht, ist offensichtlich. Die Ecken des Papier-Viereckes kommen im Diagonalenschnittpunkt zusammen. Die Frage ist, ob es auch ginge, wenn die Diagonalen nicht orthogonal sind. Dies kann wie folgt ausgeschlossen werden: Da alle Ecken des Papier-Viereckes in einem Punkt zusammenkommen, sind die Ecken des Briefumschlag-Rechteckes jeweils die Kantenmitten des Papier-Viereckes. Das Kantenmittenviereck eines beliebigen Viereckes ist ein Parallelogramm, dessen Seiten parallel zu den Diagonalen sind. Da unser Briefumschlag-Rechteck ein Rechteck ist, müssen die Diagonalen des Papier-Viereckes orthogonal sein.

3.1.1 Nicht konvexes Viereck

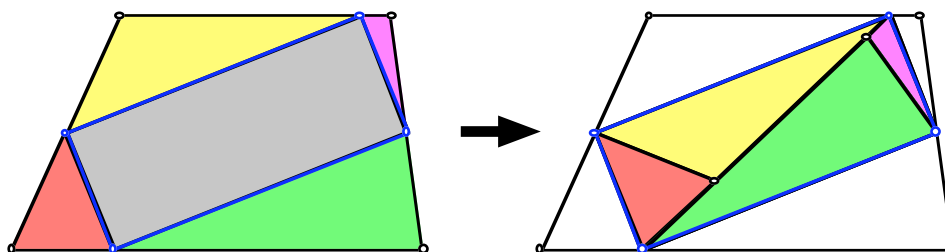
Es geht sogar mit einem Viereck, das nicht konvex ist, aber orthogonale Diagonalen hat (Figur). Der Diagonalenschnittpunkt ist dann nur noch „virtuell“. Wir falten zunächst die drei konvexen Ecken zum virtuellen Diagonalenschnittpunkt. Dann steht etwas von der Größe des vierten, virtuellen Dreieckes (gelb) vor, was wir nach hinten falten.



Nicht konvexes Viereck

3.2 Je zwei Ecken benachbarte paarweise in einem Punkt

Wir illustrieren die Situation an einem Beispiel.



Im Trapez

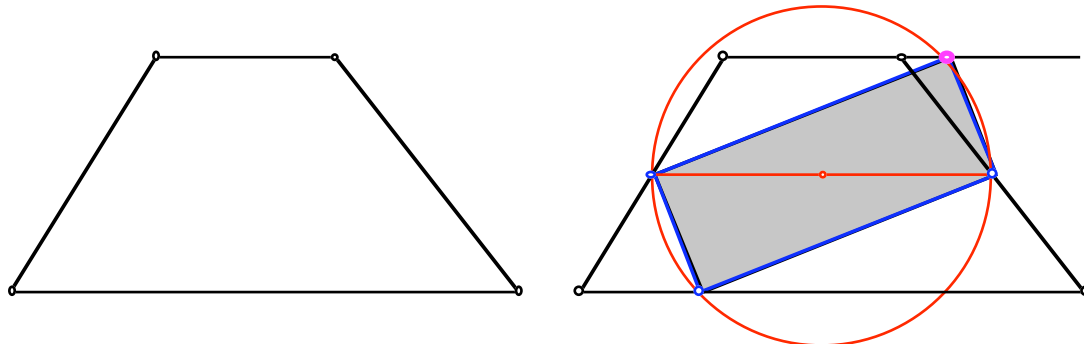
In ein Papier-Trapez passen wir ein Rechteck ein, von welchem zwei gegenüberliegende Ecken auf den Mitten der Schrägkanten des Trapezes liegen und die zwei restlichen Ecken auf den Parallelen. Dieses Rechteck wird das Briefumschlag-Rechteck. Nun können wir die Ecken des Papier-Trapezes einfalten gemäß Figur. Es geht lückenlos und überlappungsfrei. Ausprobieren!

Wenn beim Einfalten je zwei benachbarte Ecken paarweise in einem Punkt zusammenkommen, ist der Mittelpunkt der Papierkante zwischen diesen beiden Ecken eine Ecke des Briefumschlag-Rechteckes. Die Winkel des Papierviereckes in diesen beiden Ecken ergänzen sich auf 180° Grad, somit haben wir zwei parallele Papierkanten. Das Papierviereck muss also ein Trapez sein.

Das Briefumschlag-Rechteck hat zwei diametrale Ecken in den Endpunkten der Mittelparallelen des Papier-Trapezes. Die beiden anderen Ecken finden wir als Schnittpunkte des Thaleskreises über der Mittelparallele mit den parallelen Seiten des Papier-

Trapezes. Damit diese Schnittpunkte existieren, muss die Trapezhöhe kleiner oder gleich der Länge der Mittelparallele sind. Aber auch da kann es noch Probleme geben, wenn die Schrägseiten des Trapezes zu schräg sind.

3.2.1 Zu schräge Schrägseiten

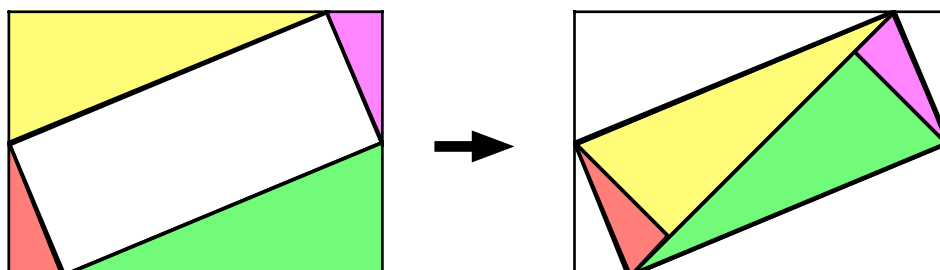


Zu schräge Trapezseiten

In diesem Fall schneidet der Thaleskreis die eine Parallelkante des Papier-Trapezes nicht. Eine Ecke des Briefumschlag-Rechteckes wird „virtuell“. Trotzdem geht es aber; man muss einen ähnlichen Trick mit mehrfachem Falten wie oben beim nicht konvexen Viereck anwenden. Ausprobieren!

3.2.2 Papier-Rechteck

Mit einem Papier-Rechteck, etwa einem DIN-Blatt, geht es problemlos.



DIN-Blatt

Das Briefumschlag-Rechteck hat allerdings nicht mehr das DIN-Format.