

Hans Walser, [20160620]

Bogenviereck mit Umkreis

1 Worum geht es

Die Kriterien für ein Sehnenviereck werden auf Bogenvierecke übertragen.

2 Erinnerung

Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn seine alternierende Winkelsumme null ist.

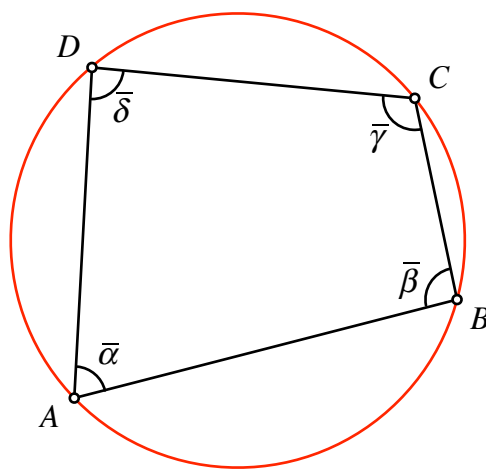


Abb. 1: Sehnenviereck

Mit den Bezeichnungen der Abbildung 1 ist also:

$$\bar{\alpha} - \bar{\beta} + \bar{\gamma} - \bar{\delta} = 0 \quad (1)$$

Das wird oft in der Form

$$\bar{\alpha} + \bar{\gamma} = \bar{\beta} + \bar{\delta} \quad (2)$$

geschrieben. Wegen der Winkelsumme 360° ist dann:

$$\bar{\alpha} + \bar{\gamma} = \bar{\beta} + \bar{\delta} = 180^\circ \quad (3)$$

Wir werden sehen, dass (1) und (2) auch für Bogenvierecke mit einem Umkreis gelten, nicht aber (3).

3 Bogenviereck

Für ein beliebiges Bogenviereck verwenden wir die Bezeichnungen der Abbildung 2.

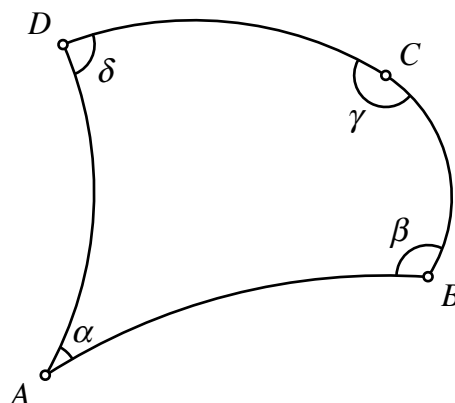
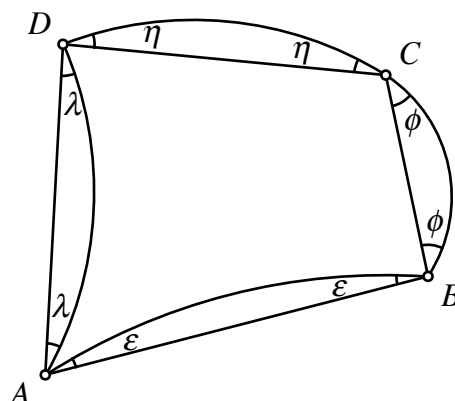


Abb. 2: Bogenviereck

Die Innenwinkel können auch negativ oder überstumpf sein.

4 Vergleich mit geradlinigem Viereck

Wir markieren die Winkelabweichungen von den Winkeln des geradlinigen Vierecks gemäß Abbildung 3. Abweichungen nach außen rechnen wir positiv, Abweichungen nach innen negativ.

**Abb. 3: Abweichungen**

Der Vergleich der Abbildungen 1, 2 und 3 liefert:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \lambda + \bar{\alpha} + \varepsilon \\
 \beta &= \varepsilon + \bar{\beta} + \phi \\
 \gamma &= \phi + \bar{\gamma} + \eta \\
 \delta &= \eta + \bar{\delta} + \lambda
 \end{aligned} \tag{4}$$

In der alternierenden Winkelsumme fallen die Abweichungen weg:

$$\alpha - \beta + \gamma - \delta = (\lambda + \bar{\alpha} + \varepsilon) - (\varepsilon + \bar{\beta} + \phi) + (\phi + \bar{\gamma} + \eta) - (\eta + \bar{\delta} + \lambda) = \bar{\alpha} - \bar{\beta} + \bar{\gamma} - \bar{\delta} \tag{5}$$

Ein Bogenviereck hat also genau dann einen Umkreis, wenn die alternierende Winkelsumme null ist.

Die direkte Winkelsumme ist in der Regel nicht 360° . Wenn zum Beispiel alle Abweichungen positiv sind, ist sie größer als 360° .

5 Beispiel Bogenrechteck

Ein Viereck mit lauter rechten Winkeln hat einen Umkreis (Abb. 4).

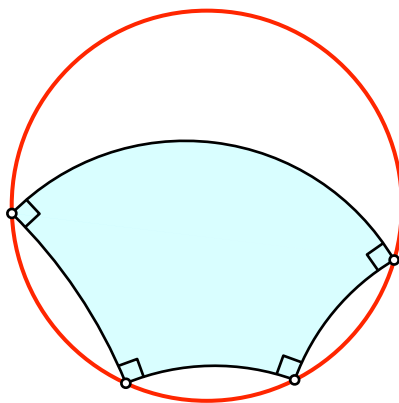


Abb. 4: Bogenrechteck