Hans Walser, [20140304], [20160125]

# Ein Bild von Max Bill

## 1 Nachzeichnung des Bildes

Die Abbildung 1 zeigt die Nachzeichnung eines Bildes von Max Bill.

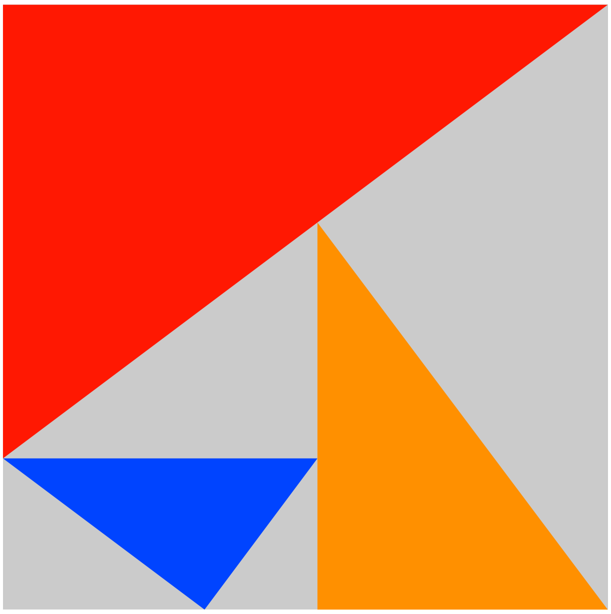

**Abb. 1: Nachzeichnung**

## 2 Das Lehrerdreieck

Das einfachste pythagoreische Dreieck hat die Seitenverhältnisse 3:4:5. Es kommt in ungezählten Schulaufgaben, Workshops, Arbeitsblättern vor und wird daher auch als „Lehrerdreieck" bezeichnet.

Auch Max Bill hat etliche Werke auf Grund dieses Dreiecks gestaltet.

Wir nehmen daher einmal an, die drei rechtwinkligen Dreiecke in der Abbildung 1 seien auch von dieser Form und untersuchen, ob das so „passt".

Die Abbildung 2 zeigt eine GeoGebra-Zeichnung.

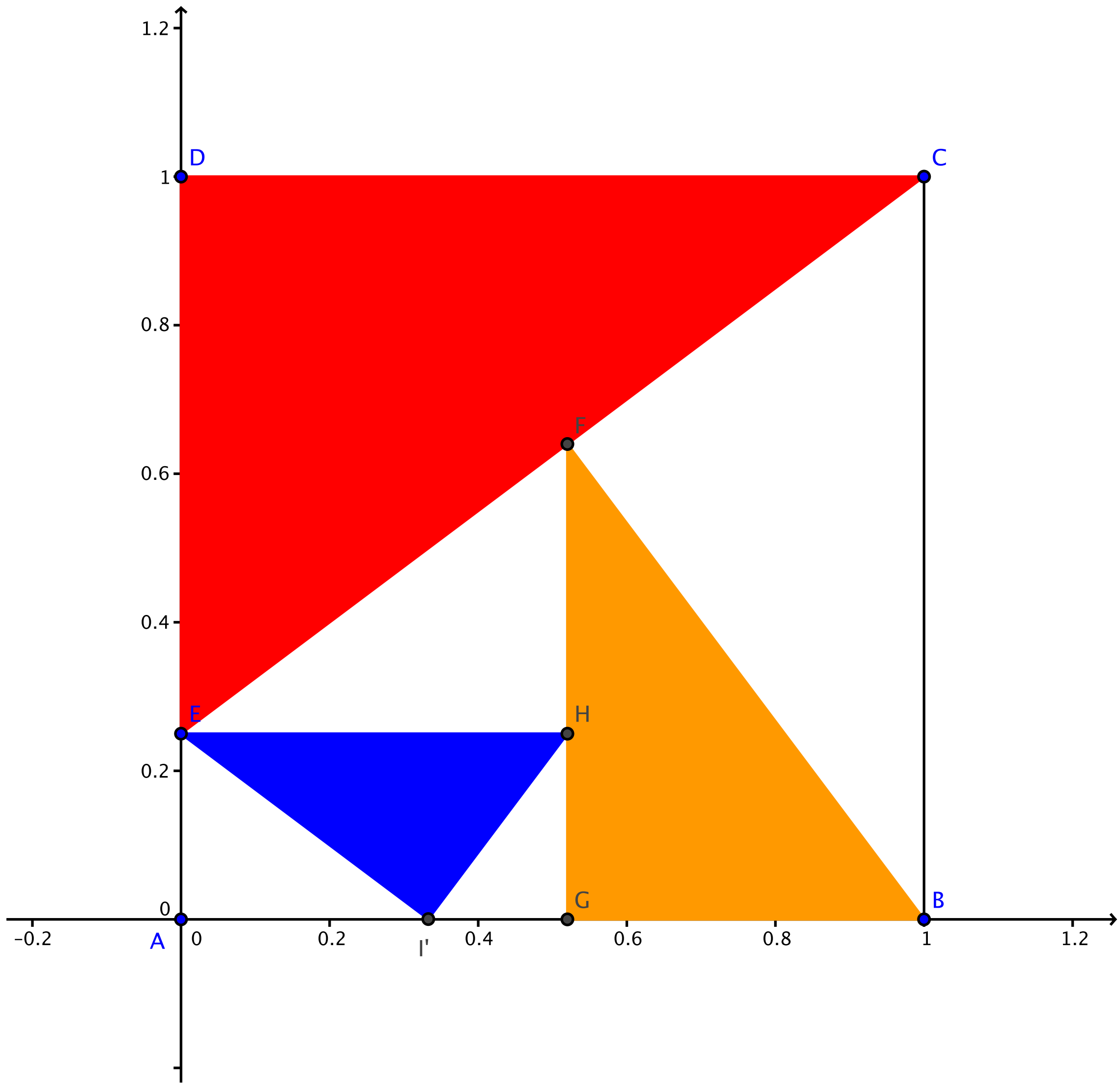


**Abb. 2: Figur im Einheitsquadrat**

Die Tabelle 1 zeigt die Koordinaten der Punkte der Abbildung 2.

| Punkt |
|---|
| A = (0.0000, 0.0000) |
| B = (1.0000, 0.0000) |
| C = (1.0000, 1.0000) |
| D = (0.0000, 1.0000) |
| E = (0.0000, 0.25000) |
| F = (0.52000, 0.64000) |
| G = (0.52000, 0.0000) |
| H = (0.52000, 0.25000) |
| I = (0.18720, 0.00040000) |
| I' = (0.33280, 0.00040000) |

**Tab. 1: Koordinaten**

Wir sehen, dass der Punkt $I'$, also der Eckpunkt am rechten Winkel des blauen Dreieckes, *nicht* auf der Basislinie des Quadrates sitzt. Der Fehler beträgt allerdings nur 0.4 Promille der Quadratseite.

Die drei Dreiecke passen also nicht ins Quadrat.

## 3 Verbesserung

Wenn wir den Punkt $E$ geringfügig tiefer setzen, kommt der Punkt $I'$ der Basislinie des Quadrates näher (Tab. 2). Die Frage ist natürlich, ob das immer noch pythagoreische Dreiecke ergibt.

| Punkt |
|---|
| A = (0, 0) |
| B = (1, 0) |
| C = (1, 1) |
| D = (0, 1) |
| E = (0, 0.2496028388) |
| F = (0.519928904283951, 0.639756012600503) |
| G = (0.519928904283951, 0) |
| H = (0.519928904283951, 0.2496028388) |
| I = (0.187301261643502, 0.000000000025959) |
| I' = (0.332627642640449, 0.000000000025959) |

**Tab. 2: Verbesserung**

## 4 Parametrisierung

Wir führen als Parameter $t$ die Kathetenlänge $DE$ ein. Dieser Parameter $t$ ist das Kathetenverhältnis der rechtwinkligen Dreiecke. Für das Lehrerdreieck ist $t = 0.75$.

Mit einiger Rechnung ergibt sich für die $y$-Koordinate des Punktes $I'$:

$$y_{I'} = 1 - t - \frac{t^3 - t^2 + t}{\left(t^2+1\right)^2} \tag{1}$$

Die Bedingung $y_{I'} = 0$ führt auf die Gleichung fünften Grades:

$$y_{I'} = 1 - t - \frac{t^3 - t^2 + t}{\left(t^2+1\right)^2} = 0 \tag{2}$$

Wir erhalten die numerische Lösung $t$ = 0.7503971612. Die oben für den Punkt $E$ gewählte verbesserte $y$-Koordinate ergibt sich aus $1 - t$.

## 5 Eine Kurve

Wir variieren den Punt $E$ auf der linken Quadratseite. Dann beschreibt der Punkt $I'$ die blaue Kurve der Abbildung 3.

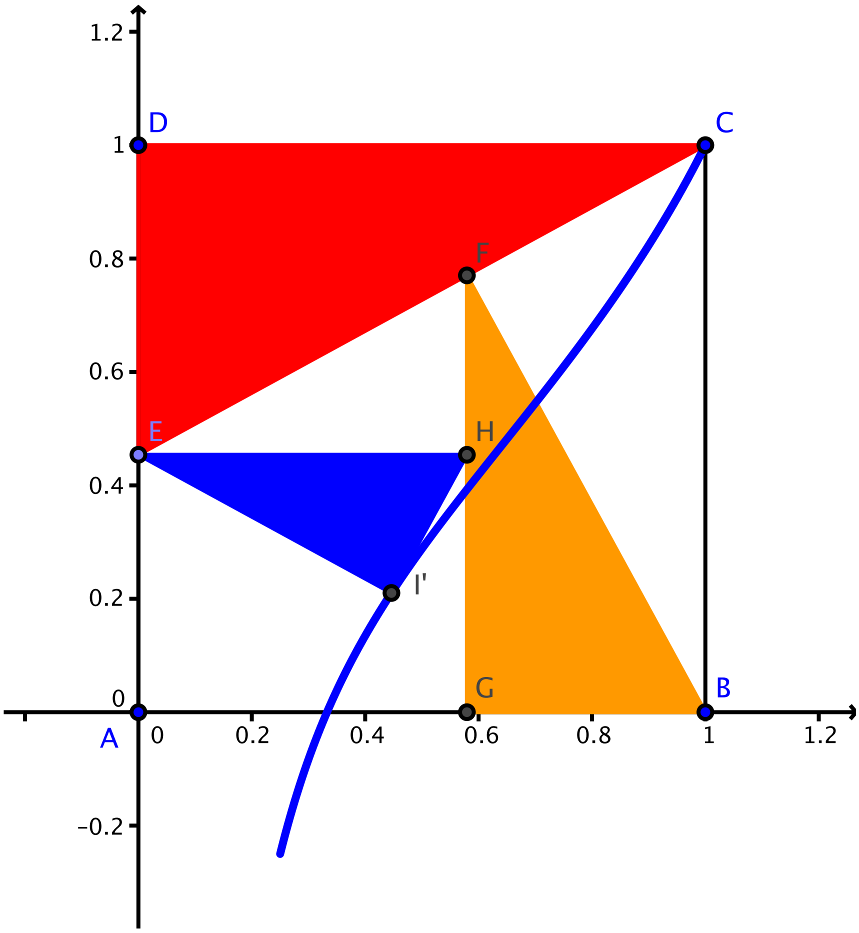


**Abb. 3: Ortslinie der Dreiecksecke**

## 6 Fast ähnliche pythagoreische Dreiecke.

Es gibt pythagoreische Dreiecke, welche fast dieselbe Form wie das Lehrerdreieck haben. So hat etwa das pythagoreische Dreieck mit

$$a = 300019999, \qquad b = 399960000, \qquad c = 499980001 \tag{3}$$

ein Kathetenverhältnis

$$\tfrac{a}{b} = 0.7501250100 \tag{4}$$

und daher fast die gleiche Form wie das Lehrerdreieck.
Hintergrund: Das Lehrerdreieck ergibt sich aus den Parametern $u = 2$ und $v = 1$ durch.

$$a = u^2 - v^2 = 3, \qquad b = 2uv = 4, \qquad c = u^2 + v^2 = 5 \tag{5}$$

Wir wählen nun $u$ und $v$ in einem etwa gleichen Verhältnis. Obiges Beispiel wurde mit $u = 20000$ und $v = 9999$ generiert.
Es ist daher zunächst nicht auszuschließen, dass es doch ein pythagoreisches Dreieck gibt, das exakt in die Bildidee von Bill passt.

## 7 Ausschluss von pythagoreischen Dreiecken

Nach einer Idee von Renato Pandi kann man das aber ausschließen wie folgt.
Die Bedingung (2) können wir umformen zu:

$$t^5 - t^4 + 3t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0 \tag{6}$$

Nun sei $t = \frac{p}{q}$ mit $p,q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ eine rationale Lösung. Der Bruch $\frac{p}{q}$ sei vollständig gekürzt, das heißt, $p$ und $q$ sind nicht beide gerade.

Wir setzen nun $t = \frac{p}{q}$ in (6) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} p^5 - p^4 q + 3p^3q^2 - 3p^2q^3 + 2pq^4 &= q^5 \\ (p-q)\left(p^4 + 3p^2q^2\right) + 2pq^4 &= q^5 \end{aligned} \tag{7}$$

Nun führen wir mit (7) eine Fallunterscheidung gemäß der Parität von $p$ und $q$ durch:

(I) $p$, $q$ beide ungerade

(II) $p$ gerade, $q$ ungerade

(III) $p$ ungerade, $q$ gerade

Es wird:

(I) gerade mal gerade plus gerade = ungerade (falsch)

(II) ungerade mal gerade plus gerade = ungerade (falsch)

(III) ungerade mal ungerade plus gerade = gerade (falsch)

Somit sind die pythagoreischen Dreiecke ausgeschlossen.