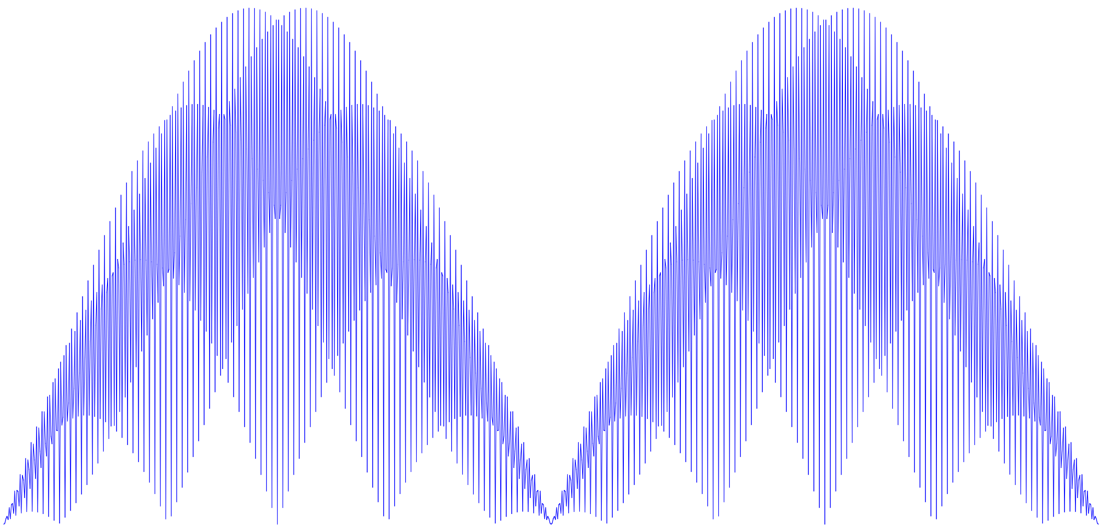
Die Basler Alpen

Anregung aus dem Euler-Zimmer am Rheinsprung

1 Die Basler Alpen



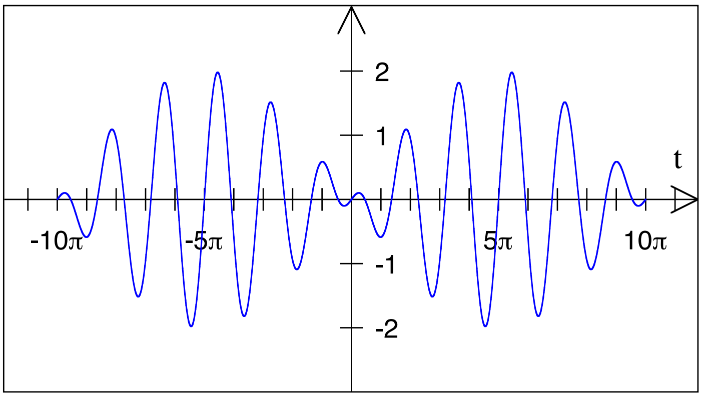
Die Basler Alpen

2 Schwingungen mit ungleicher Frequenz

Wir untersuchen die Differenz zweier Sinusfunktionen mit leicht veränderten Kreisfrequenzen, also:

$$f(t) = \sin\big((\omega + \varepsilon)t\big) - \sin(\omega t)$$

Im Folgenden das Beispiel für $\omega = 1$ und $\varepsilon = 0.2$.



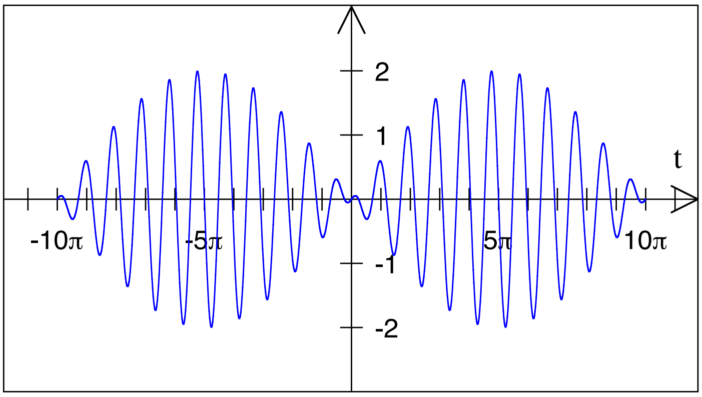
$\omega = 1$ **und** $\varepsilon = 0.2$

Die Funktion ist offensichtlich eine multiplikative Zusammensetzung einer Schwingung mit einer kleinen Kreisfrequenz und einer Binnenschwingung mit einer großen Kreisfrequenz.

Das lässt sich durch folgende Umformung zeigen:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sin\big((\omega+\varepsilon)t\big) - \sin(\omega t)\\
&= \sin(\omega t)\cos(\varepsilon t) + \cos(\omega t)\sin(\varepsilon t) - \sin(\omega t)\\
&= \sin(\omega t)\left[\cos^2\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right) - \sin^2\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right)\right] + 2\cos(\omega t)\cos\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right)\sin\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right) - \sin(\omega t)\\
&= \sin(\omega t)\left[-1 + \cos^2\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right) - \sin^2\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right)\right] + 2\cos(\omega t)\cos\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right)\sin\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right)\\
&= -2\sin(\omega t)\sin^2\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right) + 2\cos(\omega t)\cos\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right)\sin\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right)\\
&= 2\sin\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right)\left[\cos(\omega t)\cos\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right) + \sin(\omega t)\sin\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right)\right]\\
&= 2\sin\left(\tfrac{\varepsilon}{2}t\right)\cos\left(\left(\omega + \tfrac{\varepsilon}{2}\right)t\right)
\end{aligned}$$

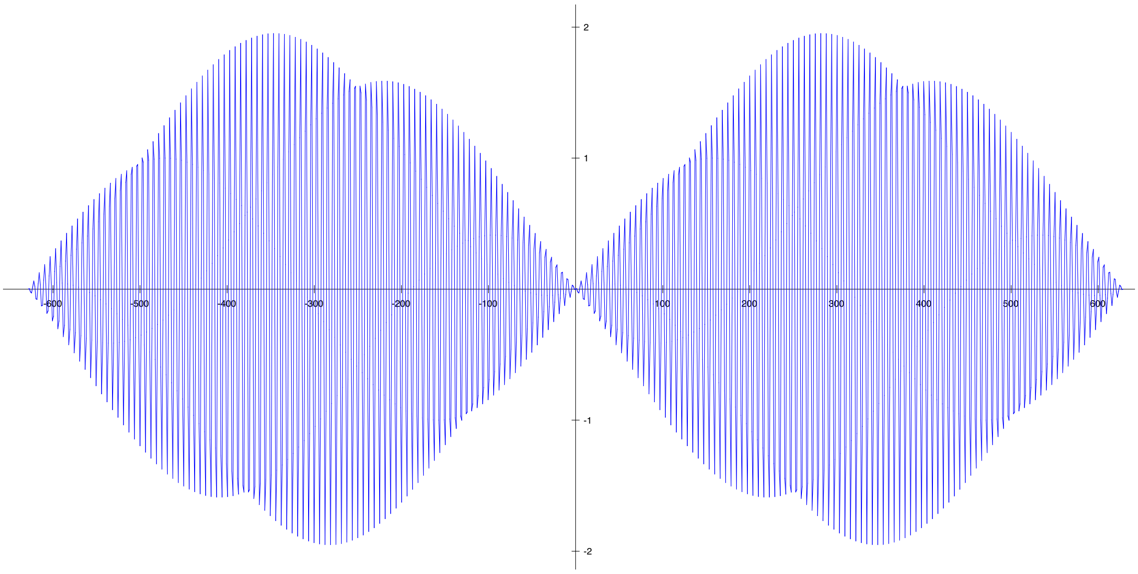
Die kleine Kreisfrequenz und damit die Periodenlänge der Funktion hängen nur von der Störung ε ab. Die folgende Figur zeigt in derselben Skalierung ein Beispiel für $\omega = 2$ und $\varepsilon = 0.2$.



$\omega = 2$ **und** $\varepsilon = 0.2$

3 Optischer Effekt

Für ein sehr kleines ε ergibt sich ein optischer Effekt, der auf der Rasterauflösung beruht. Es werden nicht mehr alle Maxima der Binnenschwingung angezeigt. Im Folgenden das Beispiel für $\omega = 1$ und $\varepsilon = 0.01$.



Optischer Effekt

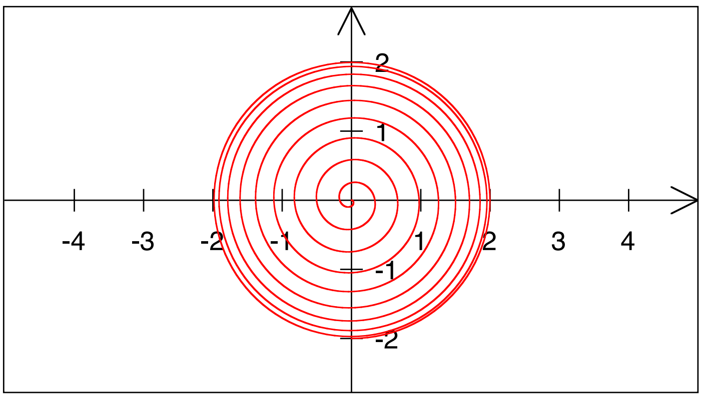
Wir mit dem Absolutbetrag alles nach oben gespiegelt, ergibt sich die gebirgige Eingangsfigur.

4 Rund geht's

Die Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \sin((\omega + \varepsilon)t) - \sin(\omega t) \\ \cos((\omega + \varepsilon)t) - \cos(\omega t) \end{bmatrix}, \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{\varepsilon}\right]$$

beschreibt die Überlagerung zweier Kreisbewegungen mit leicht unterschiedlicher Drehfrequenz. Für $\omega = 1$ und $\varepsilon = \frac{1}{18}$ ergibt sich die folgende spiralförmige Figur.



$\omega = 1$ **und** $\varepsilon = \frac{1}{18}$

5 Auf der Kugel

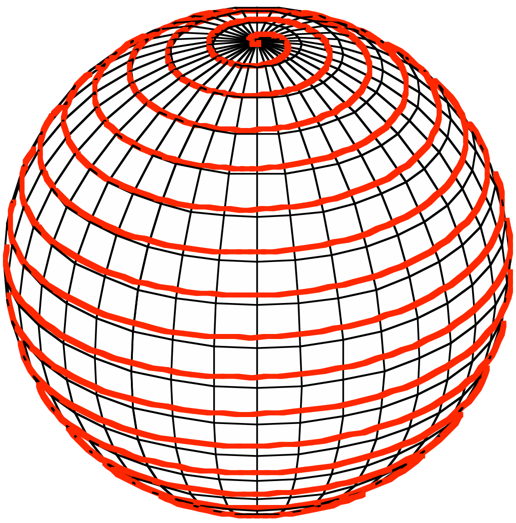
Wegen

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}\sin((\omega+\varepsilon)t)-\sin(\omega t)\\ \cos((\omega+\varepsilon)t)-\cos(\omega t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right)\cos\left(\left(\omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\right)\\ -2\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right)\sin\left(\left(\omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\right)\end{bmatrix}$$

beschreibt

$$\vec{z}(t)=\begin{bmatrix}2\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right)\cos\left(\left(\omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\right)\\ -2\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right)\sin\left(\left(\omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\right)\\ 2\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right)\end{bmatrix},\quad t\in\left[0,\frac{2\pi}{\varepsilon}\right]$$

eine Kurve auf der Kugel mit dem Radius 2, und die obige Spirale ist der Grundriss der nördlichen Hälfte dieser Kurve.



Spirale auf der Kugel

Diese Spirale hat zwischen zwei Umläufen immer denselben Abstand in der Süd-Nord-Richtung; sie ist also das sphärische Analogon zur archimedischen Spirale.