Hans Walser, [20160821]

Apolloniuskreise im Dreieck

1 Worum geht es?

Geeignete Apolloniuskreise in einem beliebigen Dreieck führen zu einem Schnittpunkt mit 60°-Teilung.

Wir treffen auf klassische Namen: Apollonius von Perga (um 262 v. Chr. - um 190 v. Chr.) , Giovanni Benedetto Ceva (1647 - 1734), Pierre de Fermat (1601/07 - 1665) und Menelaos von Alexandria (um 70 - um 130).

2 Innere und äußere Teilpunkte

Wir arbeiten in einem, beliebigen Dreieck $A_0A_1A_2$ mit den Seitenlängen a_0, a_1, a_2.

In diesem Dreieck $A_0A_1A_2$ schneiden die innere beziehungsweise äußere Winkelhalbierende durch A_0 die Gegenseite in U_0 beziehungsweise in V_0. Der Mittelpunkt der Strecke U_0V_0 ist M_0. Entsprechend die übrigen Punkte U_i, V_i, M_i (Abb. 1).

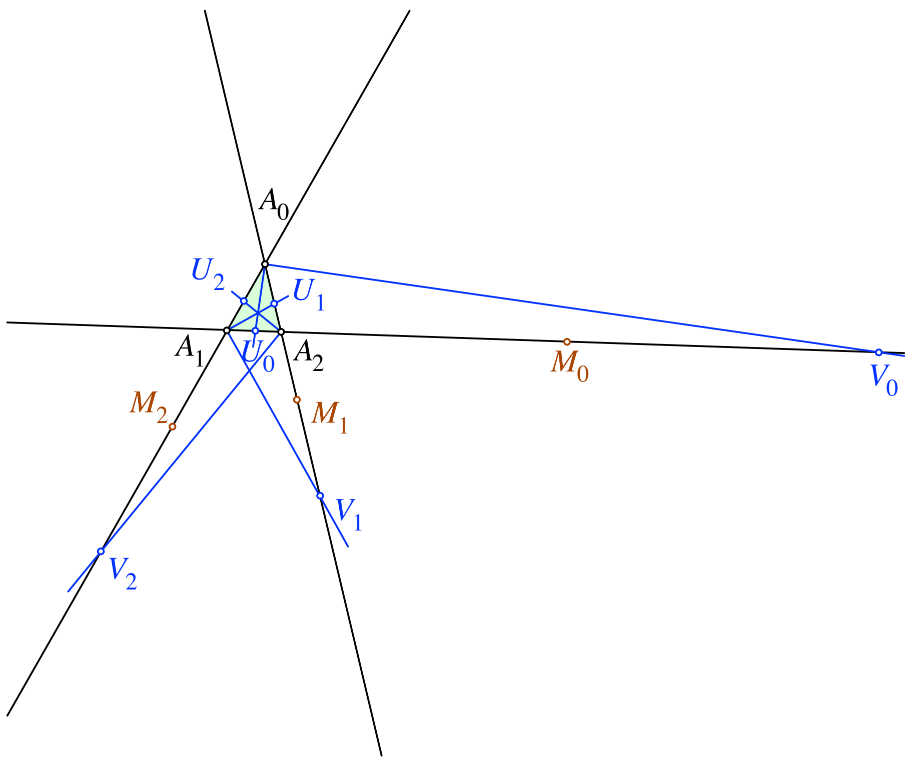

Abb. 1: Teilpunkte

3 Kollineare Punkte

Wir vermuten (Abb. 2):

(1) Die drei Punkte V_0, V_1, V_2 sind kollinear.

(2) Ebenso sind die drei Punkte M_0, M_1, M_2 kollinear.

Die Vermutung (1) kann als Sonderfall des Satzes des Menelaos von Alexandria gezeigt werden. Im Hintergrund steckt der Satz von Ceva mit den Winkelhalbierenden als Ecktransversalen.

Die Vermutung (2) wird im Folgenden in dieser Studie bewiesen.

Die beiden Geraden sind nicht parallel.

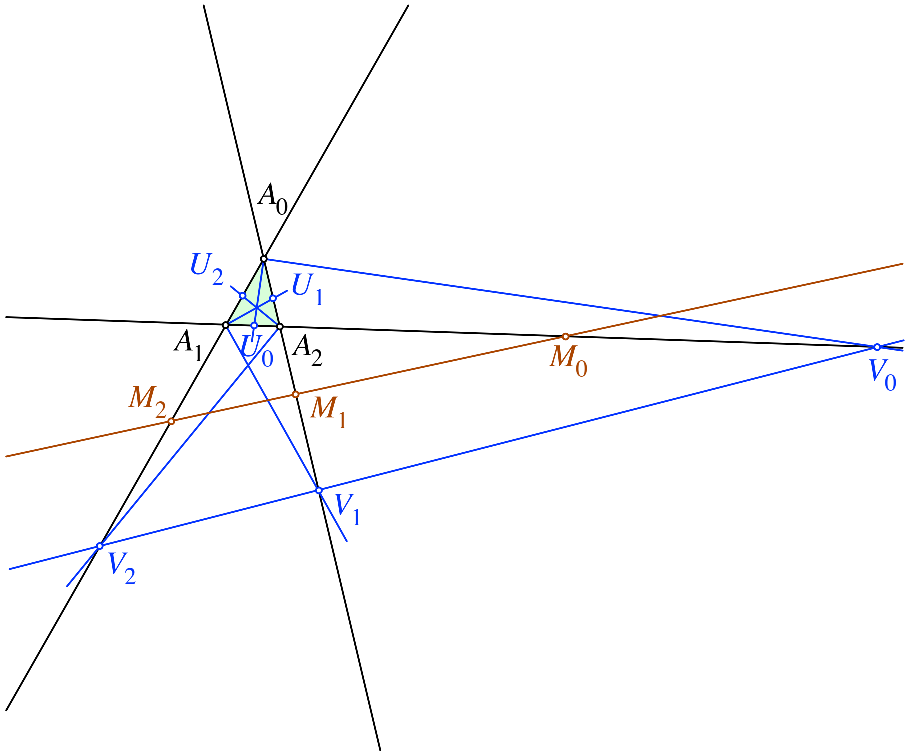

Abb. 2: Kollineare Punkte

4 Apolloniuskreise

Mit k_i bezeichnen wir den Thaleskreis über der Strecke U_iV_i (Abb. 3). Er hat den Mittelpunkt M_1.

Der Kreis k_i ist auch der Apolloniuskreis zur Strecke $A_{i+1}A_{i+2}$ (Indizes modulo 3). Für einen Punkt P auf dem Kreis k_0 gilt folgende Abstandsrelation:

$$P \in k_0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{PA_1} : \overline{PA_2} = a_2 : a_1 = \frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} \tag{1}$$

Allgemein (Indizes modulo 3):

$$P \in k_i \quad \Leftrightarrow \quad \overline{PA_{i+1}} : \overline{PA_{i+2}} = \frac{1}{a_{i+1}} : \frac{1}{a_{i+2}} \tag{2}$$

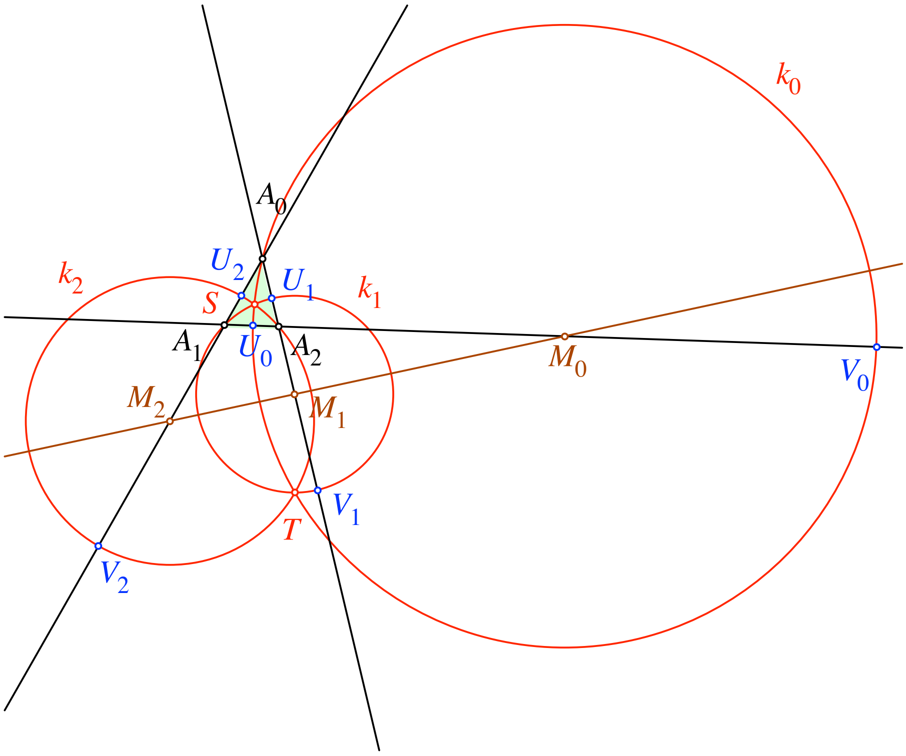

Abb. 3: Apolloniuskreise

Vermutungen:

(3) Die drei Kreise k_0, k_1, k_2 haben zwei gemeinsame Schnittpunkte (in der Abbildung 3 mit S und T bezeichnet). Sie bilden also ein Kreisbüschel.

(4) Die drei Kreise k_0, k_1, k_2 schneiden sich in S und T unter Winkeln von 60°.

5 Schnittpunkte der Apolloniuskreise

Die Schnittpunkteigenschaft kann mit der Abstandsrelation (2) gezeigt werden.

Es sei P ein Schnittpunkt von k_0 und k_1. Dann gilt:

$$P \in k_0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{PA_1} : \overline{PA_2} = \frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} \quad \text{und} \quad P \in k_1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{PA_2} : \overline{PA_0} = \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_0} \qquad (3)$$

Somit:

$$\overline{PA_0} : \overline{PA_1} : \overline{PA_2} = \frac{1}{a_0} : \frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} \qquad (4)$$

Das heißt aber, dass der Punkt P auch auf dem Kreis k_2 liegt. Damit ist die Schnittpunkteigenschaft beweisen.

Die Mittelpunkte M_0, M_1, M_2 liegen auf der Mittelsenkrechten der Strecke ST. Damit ist auch die Vermutung (2) über die Kollinearität der drei Mittelpunkte bewiesen.

6 Regelmäßige Winkelteilung

Die Vermutung (4) über die Schnittwinkel 60° kann ich nicht beweisen.

Immerhin folgendes:

7 Fermat-Punkte

Wir zeichnen die drei gleichseitigen Dreiecke $M_0M_1N_2$, $M_1M_2N_0$ und $M_2M_0N_3$ (Abb. 4).

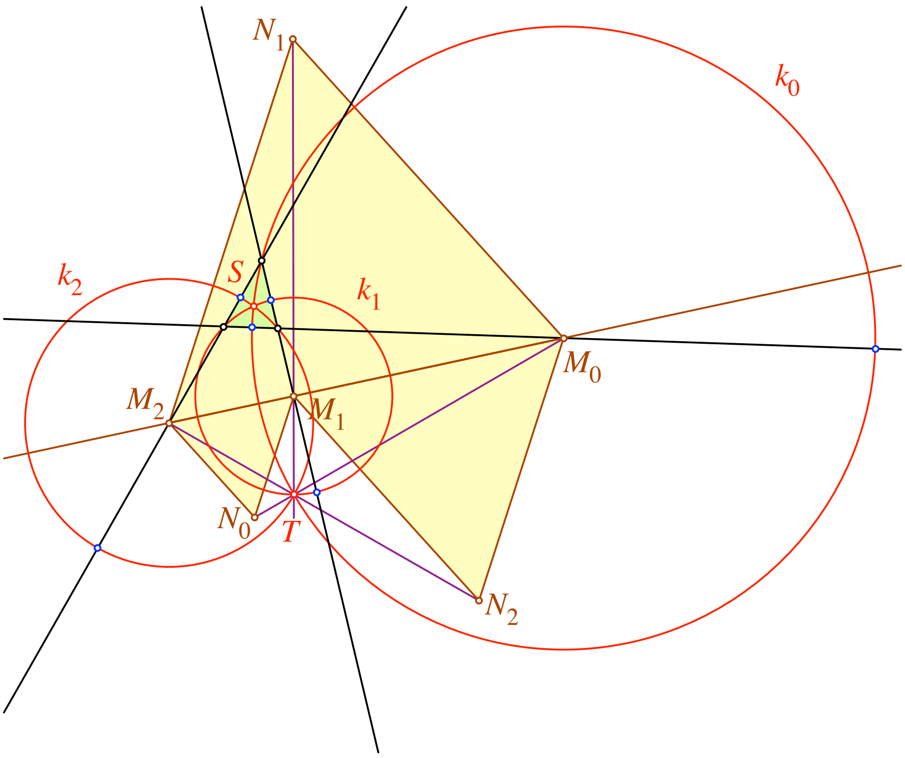

Abb. 4: Gleichseitige Dreiecke

Die drei Geraden M_iN_i sind kopunktal (und wir vermuten, dass der gemeinsame Schnittpunkt der Punkt T ist). Zudem schneiden sich die drei Geraden unter Winkeln von 60°. Der Hintergrund ist folgender: Der gemeinsame Schnittpunkt der drei Geraden M_iN_i ist einer der beiden Fermat-Punkte des (flachgedrückten) Dreieckes $M_0M_1M_2$.

Wir müssen also noch zeigen, dass die beiden Punkte S und T die beiden Fermat-Punkte sind. Die von den Mittelpunkten M_0, M_1, M_2 zu T verlaufenden Radien liegen dann auf den Geraden M_iN_i und bilden in T Winkel von 60°. Damit schneiden sich auch die Kreise k_i unter diesen Winkeln.