Hans Walser, [20140819]

Anzahl Dreiecke im Dreiecksgitter

Anregung und Idee: T. H., A.

1 Worum es geht

In einem regulären Dreiecksgitter mit n Gitterpunkten an einer Seite und Spitze nach oben zeichnen wir gleichseitige Dreiecke ein. Die Dreieckseckpunkte sollen Gitterpunkte sein.

Die Abbildung 1 zeigt ein Beispiel mit $n = 9$.

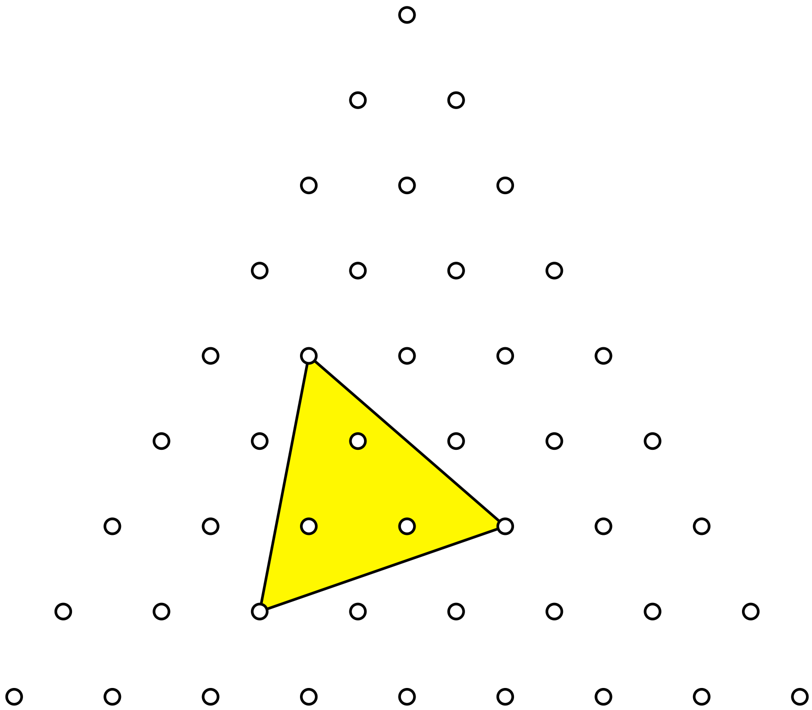

Abb. 1: Dreiecksgitter und Dreieck

Gesucht ist die Anzahl $D(n)$ der möglichen gleichseitigen Dreiecke.

2 Gitterparallele Dreiecke mit Spitze nach oben

Jedes Dreieck kann in ein gitterparalleles Dreieck mit Spitze nach oben einbeschrieben werden (Abb. 2). Das gitterparallele Dreieck ist magenta gezeichnet.

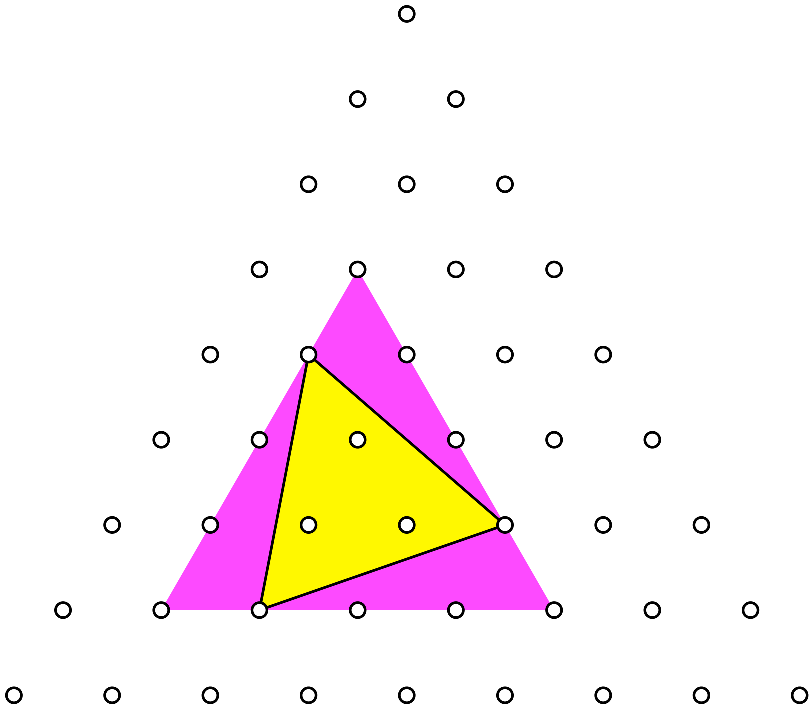

Abb. 2: Gitterparalleles Dreieck mit Spitze nach oben

Es gibt $\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$ gitterparallele Dreiecke mit Spitze nach oben und Kantenlänge k. Dabei ist $k \in \{1,...,n-1\}$.

3 Einbeschriebene Dreiecke

Umgekehrt können in ein gitterparalleles Dreieck mit Spitze nach oben und Kantenlänge k genau k gleichseitige Dreiecke einbeschrieben werden, wobei das gitterparallele Dreieck mitgezählt wird (Abb. 3 für $k = 4$).

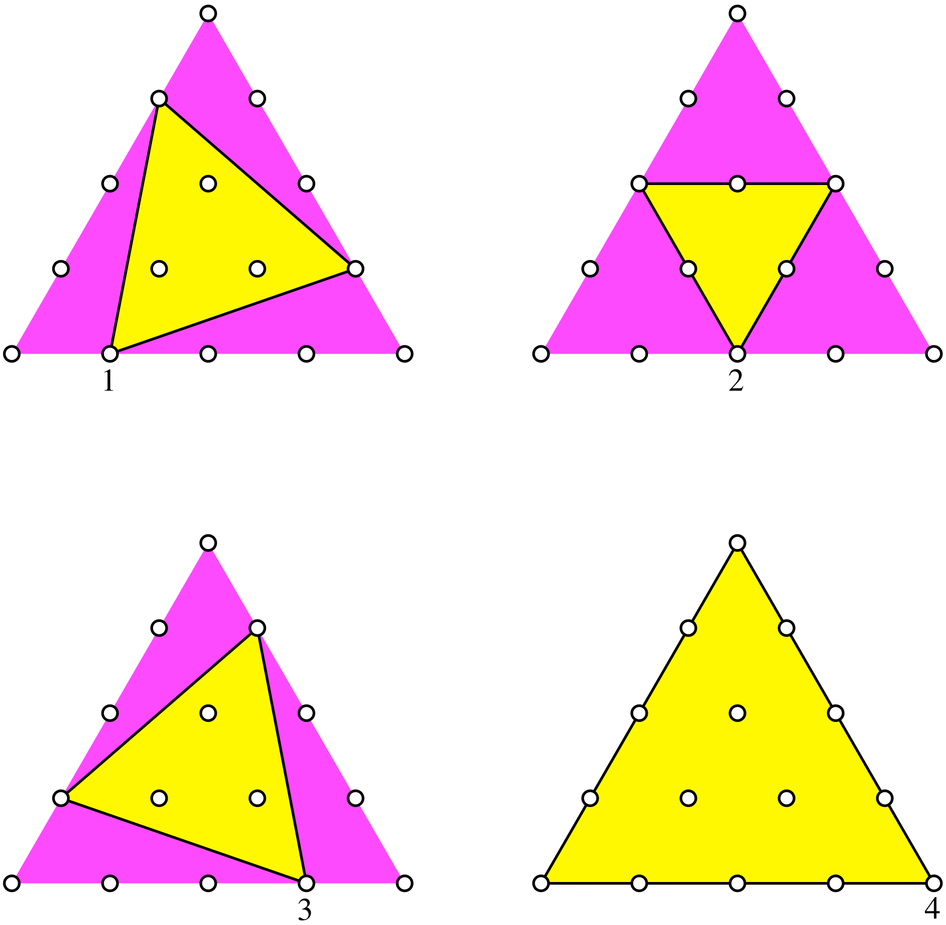

Abb. 3: Einbeschriebene Dreiecke

4 Die Anzahl der Dreiecke

Damit erhalten wir für die gesuchte Anzahl $D(n)$:

$$D(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{1}{2}(n-k)(n-k+1)k = \tfrac{1}{2}\left(\left(n^2+n\right)\sum_{k=1}^{n-1} k - (2n+1)\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \right)$$

Einsetzen der einschlägigen Formeln für die drei Summen rechts ergibt:

$$D(n) = \tfrac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2) = \binom{n+2}{4}$$

5 Haifischzähne

Wie viele Haifischzähne (gitterparallele Dreiecke mit Spitze nach unten, Abb. 4) gibt es?

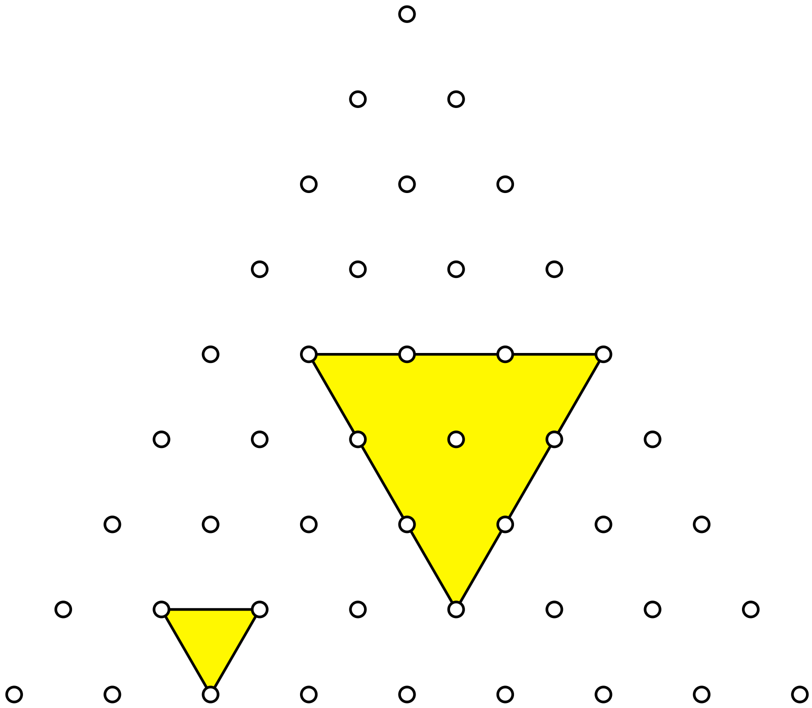

Abb. 4: Haifischzähne

5.1 Erster Lösungsweg

Das umbeschriebene gitterparallele Dreieck (mit Spitze nach oben) eines Haifischzahns hat gerade Kantenlänge. Zu jedem gitterparallelen Dreieck mit Spitze nach oben und gerader Kantenlänge ist das Seitenmittendreieck ein Haifischzahn. Aus der Formel

$$D(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{1}{2}(n-k)(n-k+1)k$$

folgt daher:

$$\begin{aligned} H(n) &= \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \tfrac{1}{2}(n-2j)(n-2j+1) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(n^2+n\right) \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} 1 - (2n+1) \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} j + 2 \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} j^2 \end{aligned}$$

Fallunterscheidung bezüglich der Parität von n.

n gerade: In diesem Fall ist $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2} - 1$. Wir erhalten:

$$H(n)=\tfrac{1}{2}\left(n^2+n\right)\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}1-(2n+1)\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}j+2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}j^2$$

Mit der üblichen Bearbeitung der einzelnen Summen ergibt sich schließlich:

$$n \text{ gerade} \quad\Rightarrow\quad H(n)=\tfrac{1}{24}(n-2)n(2n+1)$$

n ungerade: In diesem Fall ist $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$. Analoge Bearbeitung liefert:

$$n \text{ ungerade} \quad\Rightarrow\quad H(n)=\tfrac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n-3)$$

5.2 Zweiter Lösungsweg

Experimentieren mit verschiedenen n und verschiedenen k (Seitenlängen des Haifischzahns) führt auf folgende Tabelle:

$n \setminus k$	1	2	3	4	$H(n)$
2	0				0
3	1				1
4	3				3
5	6	1			7
6	10	3			13
7	15	6	1		22
8	21	10	3		34
9	28	15	6	1	50

Tab. 1: Daten

Wir erkennen in den Spalten die Binomialkoeffizienten $\binom{m}{2}=\frac{1}{2}m(m-1)$ mit einem „hinkenden" Höhenversatz 2.

Es ist:

$$H(n)=\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n+1-2j}{2}=\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\tfrac{1}{2}(n+1-2j)(n-2j)$$

Das ist aber dieselbe Formel wie beim ersten Lösungsweg.