Hans Walser, [20090117a], [20151203]

Alternierende Quadratsummen

1 Worum geht es?

Es werden Quadratketten konstruiert, deren alternierende Flächensumme null ist.

2 Vieleck mit aufgesetzten Quadraten

2.1 Die Quadratkette

In einem Vieleck mit Eckenzahl n wählen wir einen Punkt P und fällen die Lote auf die Seiten. Dann setzen wir Quadrate auf gemäß Abbildung 1 (Figur für $n = 5$). Die alternierende Quadratflächensumme ist null.

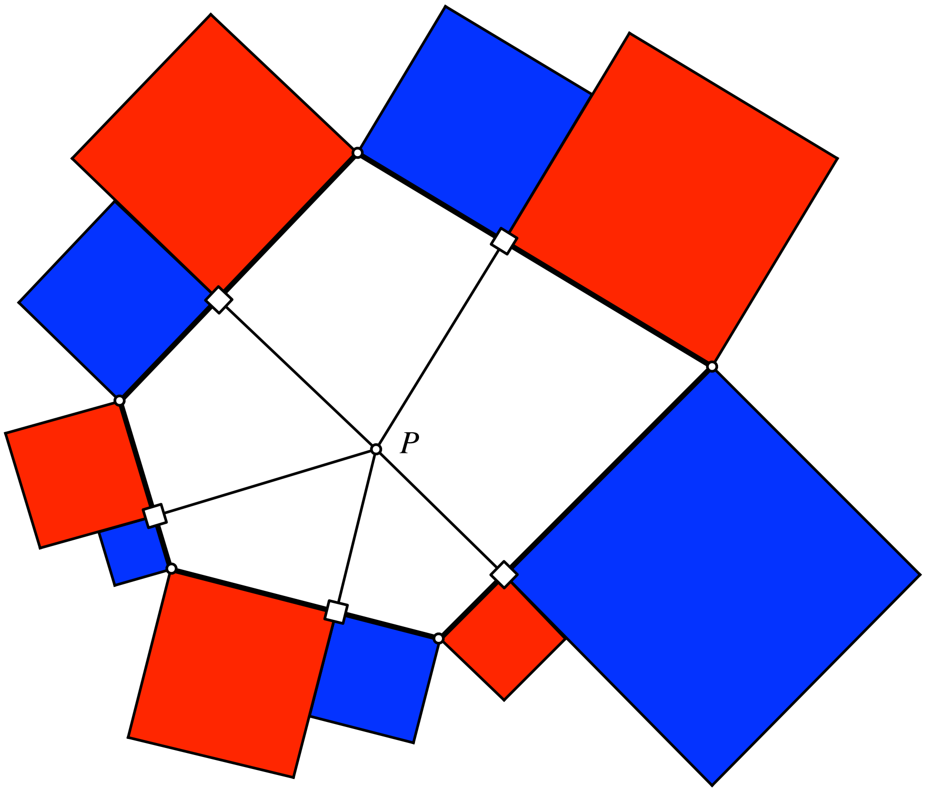

Abb. 1: rot = blau

2.2 Beweis

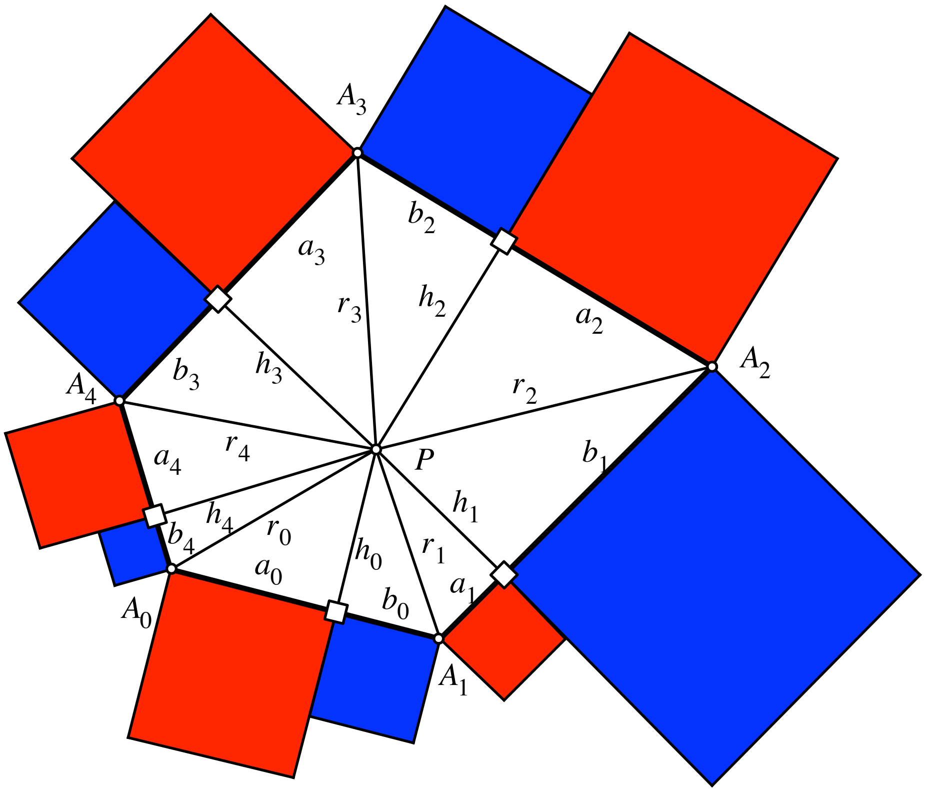

Abb. 2: Beweisfigur

Wir ergänzen gemäß Figur und beschriften und nummerieren zyklisch. Damit gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} r_i^2 - \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n-1} b_i^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} r_{i+1}^2 - \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2\end{aligned} \tag{1}$$

Wegen der zyklischen Nummerierung modulo n ist $\sum_{i=0}^{n-1} r_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} r_{i+1}^2$. Daraus folgt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^2 \tag{2}$$

Das ist die Behauptung.

2.3 Dreieck

Im Dreieck gilt allgemein die Figur der Abbildung 3.

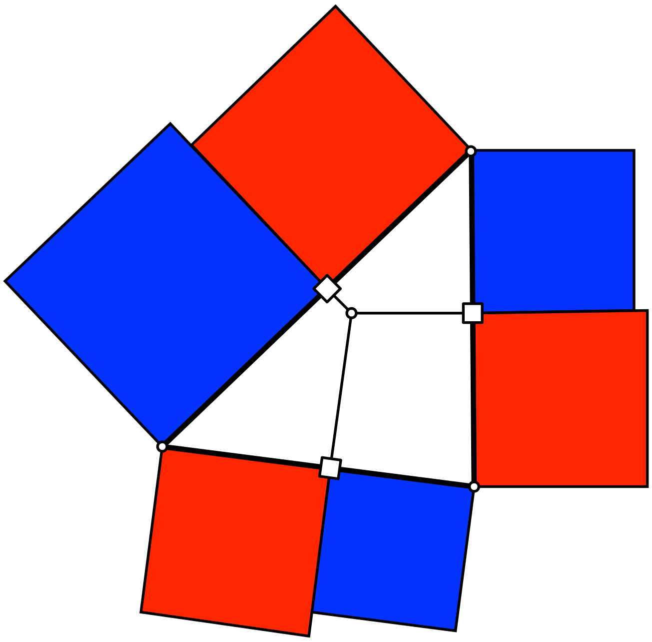

Abb. 3: rot = blau

2.4 Sonderfall im Dreieck

Wir schieben nun den Punkt P in eine Dreiecksecke (Abb. 4). Dann entsteht eine Figur mit einer Dreieckshöhe und nur vier Quadraten.

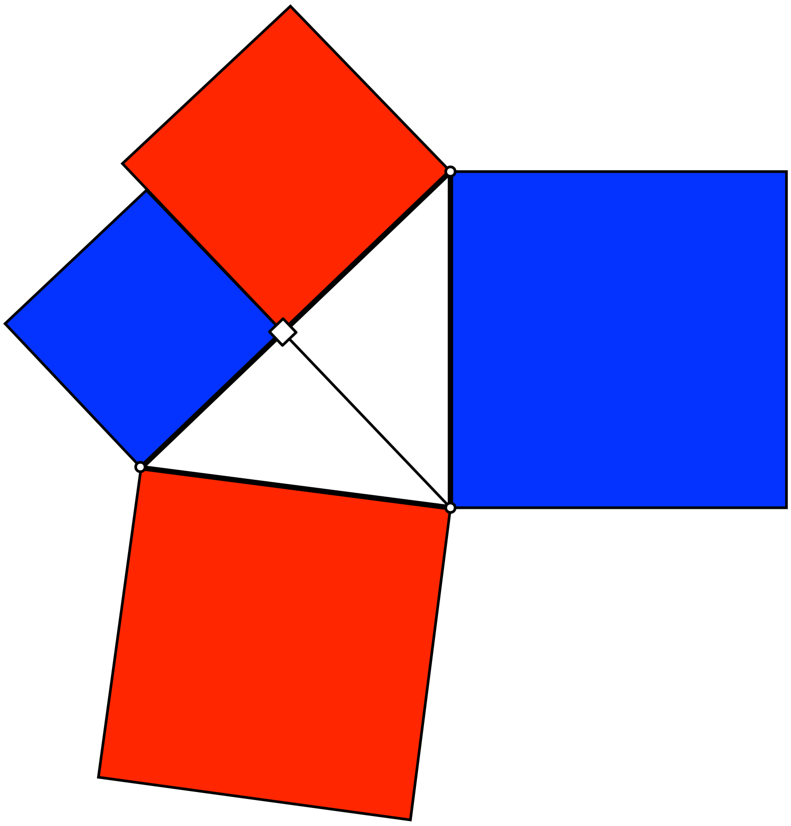

Abb. 4: rot = blau

3 Frage der Umkehrung

3.1 Dreieck

Im Dreieck gilt auch die Umkehrung. Wenn die alternierende Quadratsumme verschwindet, schneiden sich die Orthogonaltrajektorien in einem Punkt.

Wir arbeiten mit den Bezeichnungen der Abbildung 5.

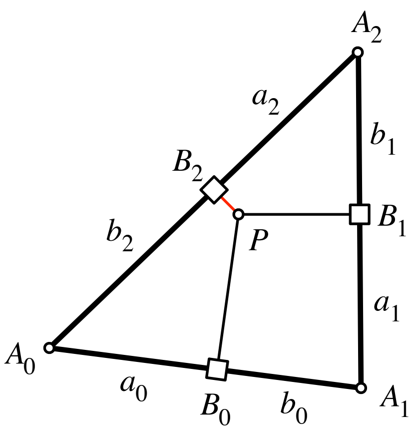

Abb. 5: Bezeichnungen

Zunächst gelten folgende vier Bedingungen:

$$\begin{aligned} a_0^2 - b_0^2 + a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 &= 0 \\ a_0 + b_0 &= \overline{A_0 A_1} \\ a_1 + b_1 &= \overline{A_1 A_2} \\ a_2 + b_2 &= \overline{A_2 A_0} \end{aligned} \qquad (3)$$

Wenn wir nun zusätzlich B_0 und B_1 wählen, werden zum Beispiel a_0 und a_1 festgelegt. Zusammen mit (3) haben wir nun ein Gleichungssystem für a_i und b_i, $i \in \{0,1,2\}$. Dieses gibt uns a_2 und damit rein rechnerisch die Position von B_2.

Andererseits legen B_0 und B_1 den Punkt P fest und vermöge Abschnitt 2.1 denselben Punkt B_2. Das heißt, dass die Orthogonaltrajektorien durch B_i, $i \in \{0,1,2\}$, kopunktal sind.

3.2 Viereck

Im Viereck gilt die Umkehrung nicht. Die Abbildung 6 zeigt ein Gegenbeispiel.

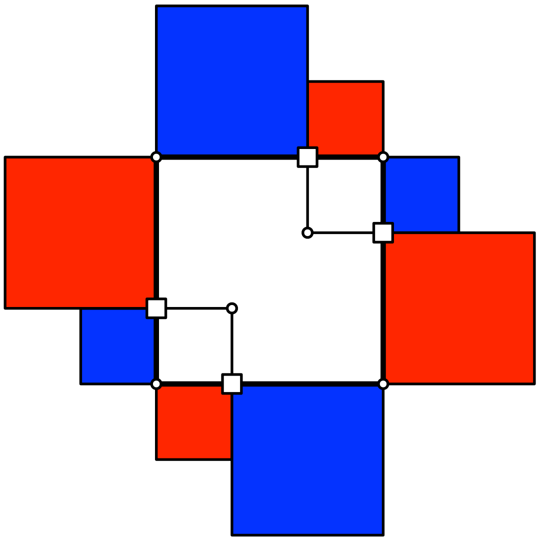

Abb. 6: Gegenbeispiel

Analoge Gegenbeispiele können für Eckenzahlen > 4 konstruiert werden.

4 Verallgemeinerung

4.1 Quadratkette

Wir gehen zurück zum Fall des Vieleckes mit n Ecken und wählen auf jeder Lotgeraden durch P einen beliebigen Punkt. Dann ergänzen wir gemäß Abbildung 7. Wiederum verschwindet die alternierende Quadratsumme.

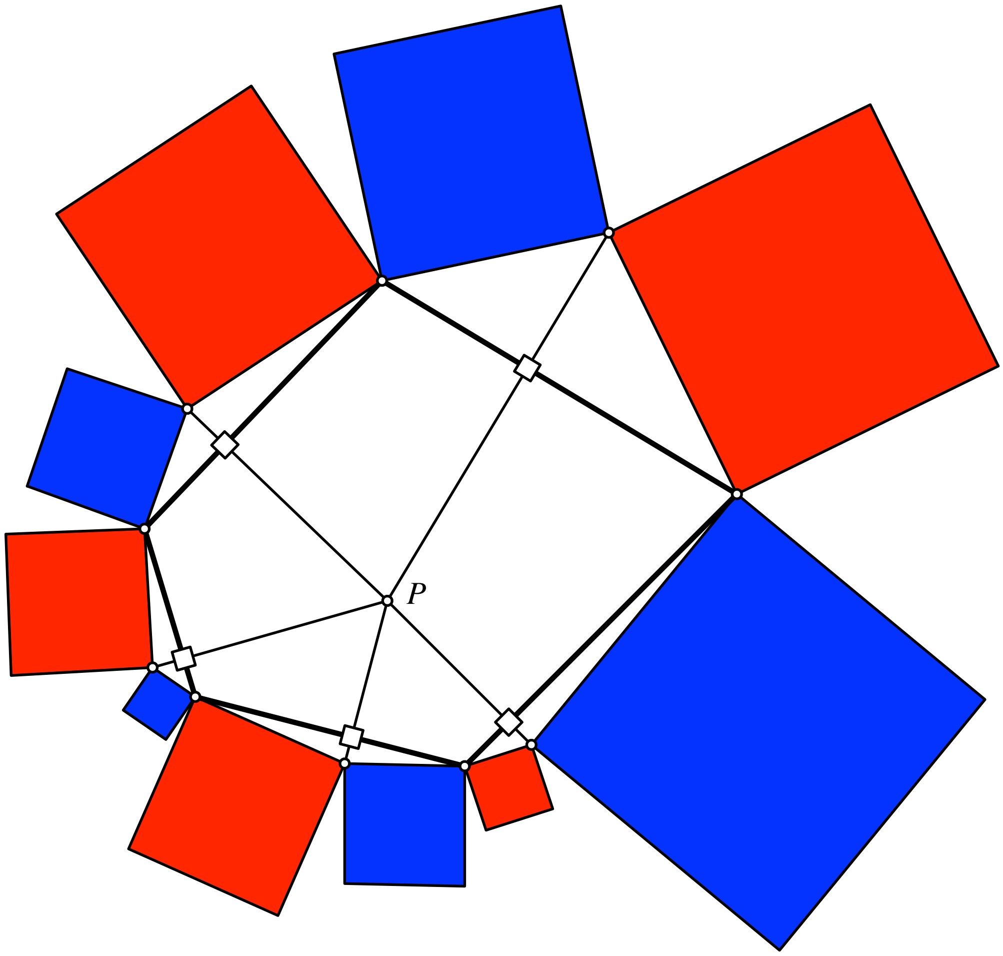

Abb. 7: rot = blau

4.2 Beweis

Wir beschriften und nummerieren zyklisch gemäß Abbildung 8.

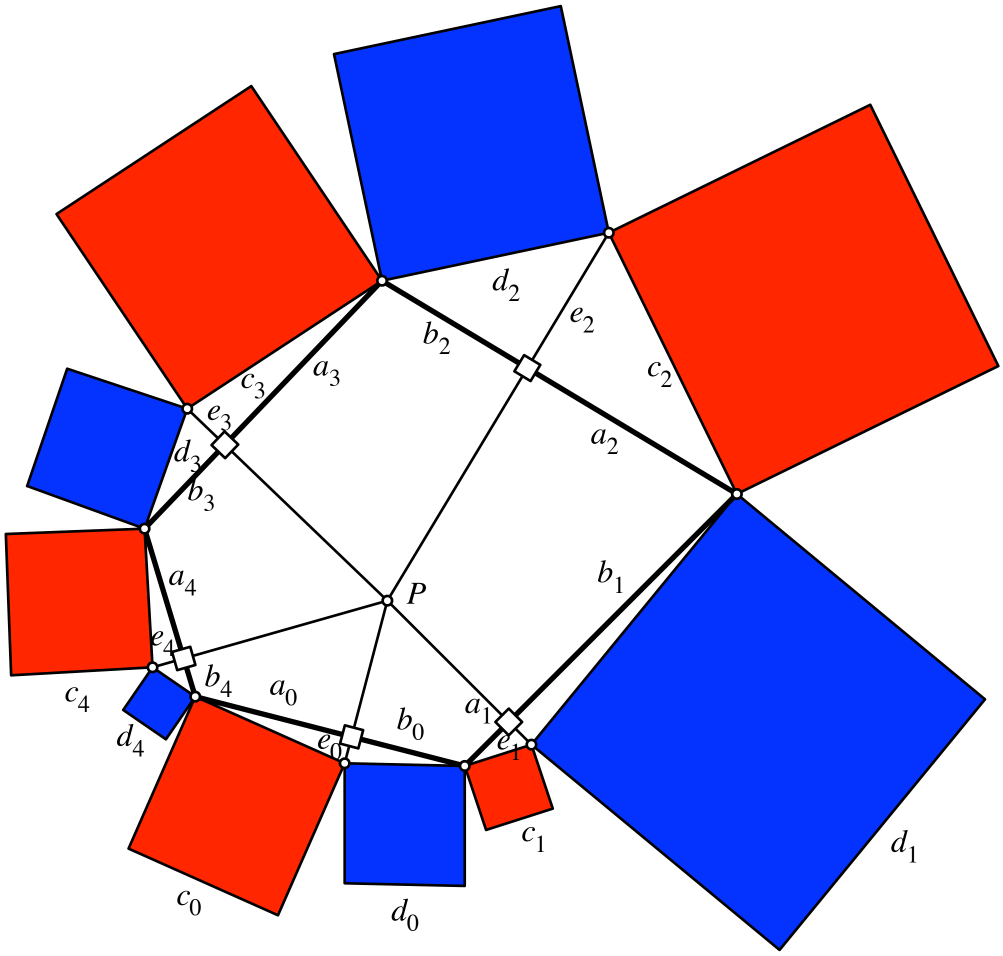

Abb. 8: Beweisfigur

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} e_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n-1} d_i^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} e_i^2\end{aligned} \tag{4}$$

Wegen $\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^2$ ist auch $\sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} d_i^2$. Das ist die Behauptung.

4.3 Eine Schnittpunkteigenschaft im Dreieck

In einem (ersten) Dreieck (grün in Abb. 9) wählen wir einen Punkt P und fällen die Lote auf die Dreiecksseiten. Auf jedem Lot wählen wir einen beliebigen Punkt und verbinden diese drei Punkte zu einem (zweiten) Dreieck (orange in Abb. 9). Nun fällen wir von den Ecken des ersten (grünen) Dreiecks aus je das Lot auf eine Seite des zweiten (orangen) Dreiecks gemäß Abbildung 9. Diese drei Lote schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt Q.

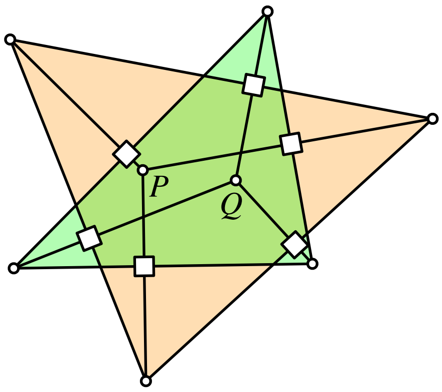

Abb. 9: Schnittpunkt *Q*

Die entstehende Figur ist begrifflich symmetrisch.

Zu den Ecken können wir Quadrate einzeichnen, deren alternierende Summe verschwindet (Abb. 10).

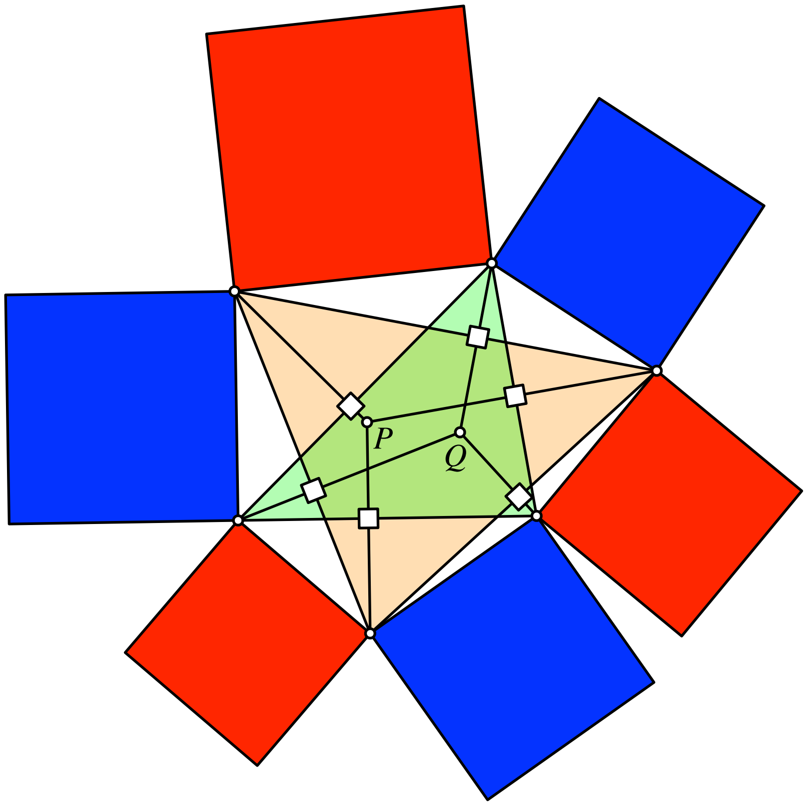

Abb. 10: Alternierende Quadrate

4.4 Sonderfall im Dreieck

Wir wählen den Punkt P als Höhenschnittpunkt und schneiden die Lotgeraden mit dem Umkreis (Abb. 11).

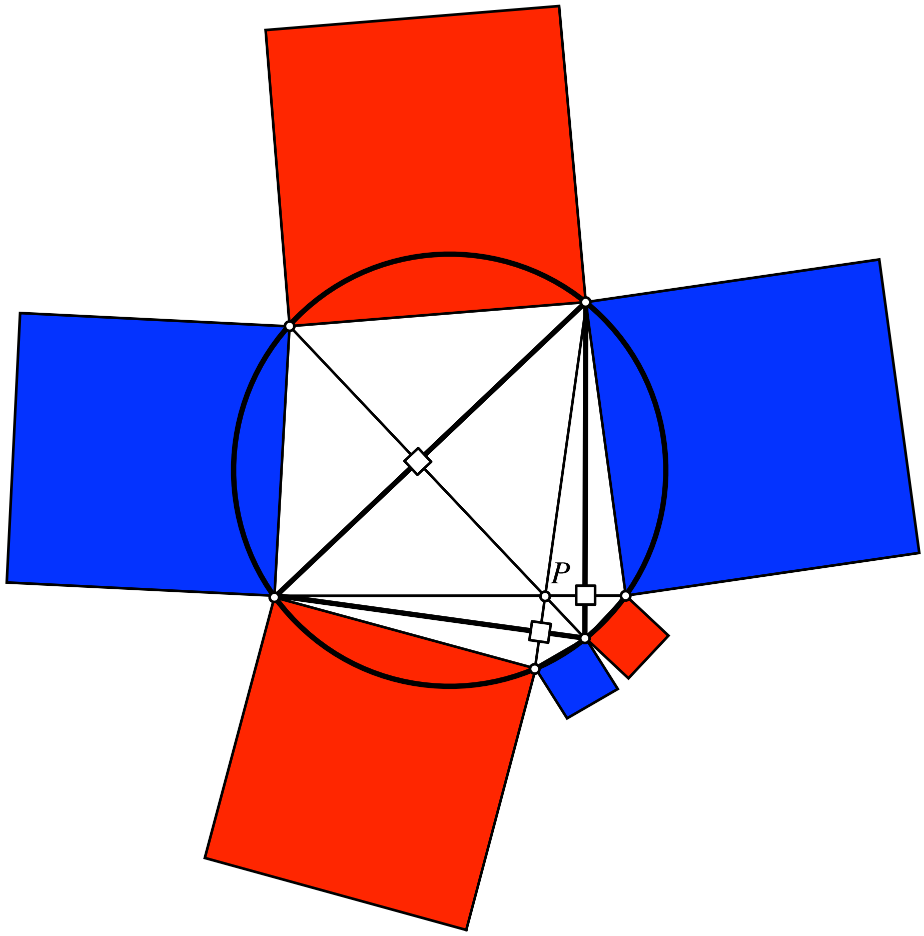

Abb. 11: Sonderfall im Dreieck

Die Quadrate sind dann paarweise kongruent. Beweis?

5 Orthogonales Achsenkreuz

Wir wählen auf den Achsen eines orthogonalen Achsenkreuzes je zwei beliebige Punkte und ergänzen mit Quadraten gemäß Abbildung 12. Wiederum verschwindet die alternierende Quadratsumme. Beweis?

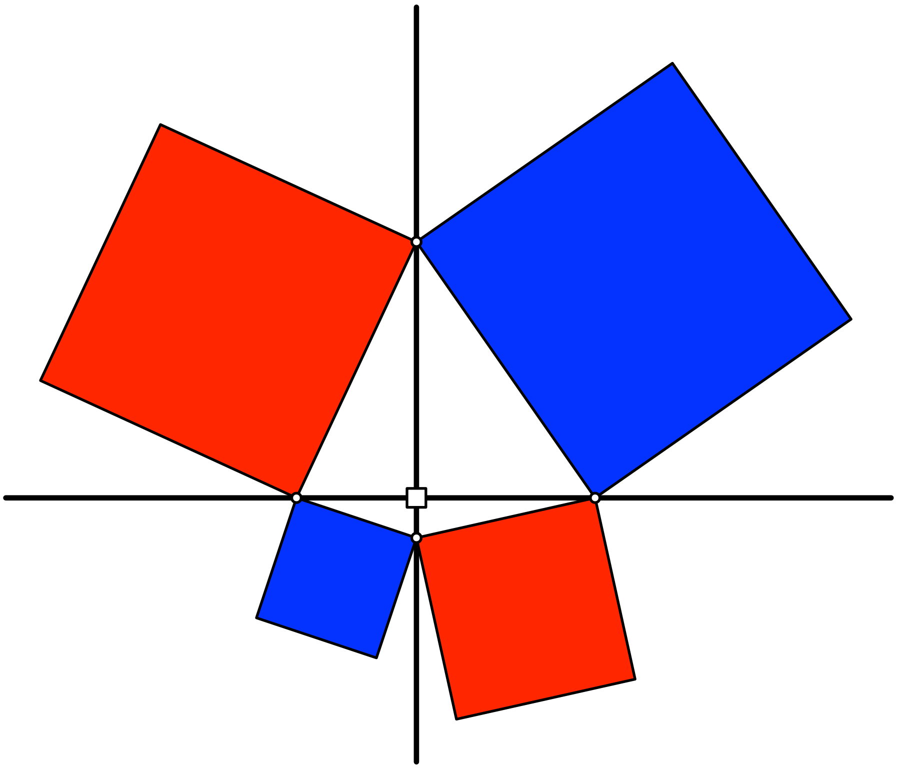

Abb. 12: Achsenkreuz