Hans Walser, [20180929]

Alle Neune

Idee und Anregung: Rainer Kaenders & Carl Peter Fitting, Bonn

1 Worum geht es?

Spielerei im Dezimalsystem.

2 Die Siebener-Reitschule

2.1 Der Bruch

Der Bruch

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857} \tag{1}$$

hat eine Dezimalbruchentwicklung mit der Periode 142857. Wir ordnen diese Ziffern in einem Kreis an (Abb. 1). Die Anordnung ist im Gegenuhrzeigersinn.

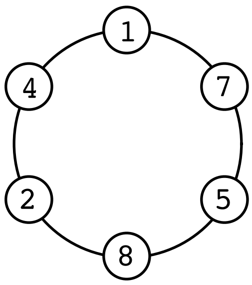

Abb. 1: Siebener-Reitschule

2.2 Gegenüberliegende Zahlen

Gegenüberliegende Zahlen haben immer die Summe neun (Abb. 2).

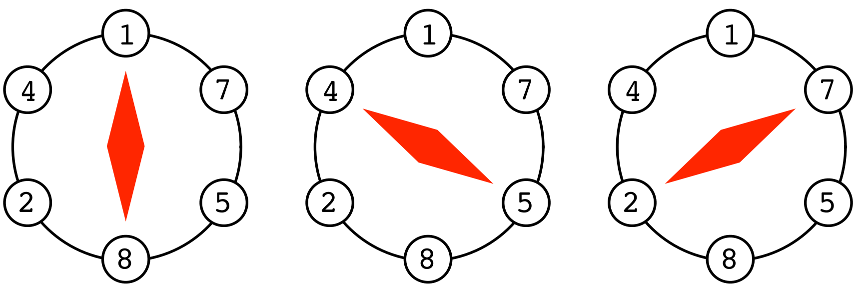

Abb. 2: Summe neun

$$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ \underline{8} & \underline{5} & \underline{2} \\ 9 & 9 & 9 \end{array} \qquad (2)$$

Wir können (2) entweder als drei einzelne Additionen sehen, nämlich

$$1 + 8 = 9, \quad 4 + 5 = 9, \quad 7 + 2 = 9$$

oder als eine einzige Addition:

$$147 + 852 = 999$$

2.3 Symmetrische Tripel

In der Abbildung 3 sind die beiden passenden Dreispitz-Sterne eingezeichnet.

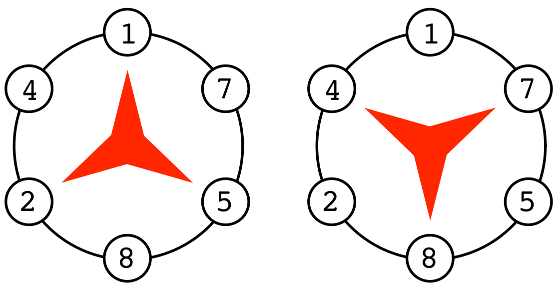

Abb. 3: Dreispitz-Sterne

Die Summen der Zahlen an den Sternspitzen sind verschieden:

$$1 + 2 + 5 = 8, \quad 4 + 8 + 7 = 19$$

In (3) sind diese Rechnungen dargestellt wie in der Schule:

$$\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 8 \\ \underline{5} & \underline{7} \\ 8 & 19 \end{array} \qquad (3)$$

Und jetzt kommt der Gag mit dem Übertrag.

$$\begin{array}{r} 14 \\ 28 \\ 57 \\ {\color{red}1} \\ \hline 99 \end{array} \tag{4}$$

Wir haben die beiden Spalten als eine Spalte mit zweistelligen Zahlen interpretiert und dann gerechnet:

$$14 + 28 + 57 = 99$$

Damit haben wir wieder die Neunen erhalten.

Das Karussell ist in drei Sektoren aufgeteilt worden (Abb. 4). Die Leserichtung ist im Gegenuhrzeigersinn.

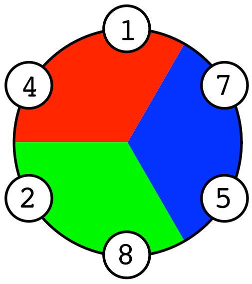

Abb. 4: Sektoren

2.4 Zusammenfassung

Aus der Siebentel-Periode `142857` machen wir die beiden Rechnungen

$$142 + 857 = 999$$

und:

$$14 + 28 + 57 = 99$$

Wir erhalten nichts als Neunen.

Natürlich ist man versucht, die Sache noch mehr aufzufächern:

1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27

Es klemmt. Wenn wir aber schon beim Auffächern sind:

1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27,   2 + 7 = 9

Und schon wieder eine Neun.

3 Ein happiges Beispiel

3.1 Der Bruch

Es ist:

$$\frac{1}{61} = 0.\overline{016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459} \tag{5}$$

Die Periodenlänge ist 60. Wir zerlegen die Ziffernfolge

016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459

der Periode in Additionen mit gleichstelligen Summanden.

3.2 Zwei Summanden

Die Summanden haben je 30 Stellen.

```
016393442622950819672131147540
983606557377049180327868852459
──────────────────────────────
999999999999999999999999999999
```

3.3 Drei Summanden

Die Summanden haben je 20 Stellen

```
01639344262295081967
21311475409836065573
77049180327868852459
────────────────────
99999999999999999999
```

3.4 Vier Summanden

Die Summanden haben je 15 Stellen.

```
 016393442622950
 819672131147540
 983606557377049
 180327868852459
────────────────
1999999999999998
```

Merde pour le roi d'Angleterre. Klappt nicht. Sehen wir die Sache mal mit den Überträgen an.

```
 016393442622950
 819672131147540
 983606557377049
 180327868852459
111111111111111
────────────────
1999999999999998
```

Wenn wir den vordersten Übertrag hinten einfügen, kommt die Sache zum Stimmen (Abb. 5).

```
 016393442622950
 819672131147540
 983606557377049
 180327868852459
111111111111111
────────────────
1999999999999998
```

```
016393442622950
819672131147540
983606557377049
180327868852459
111111111111111
───────────────
999999999999999
```

Abb. 5: Zyklische Addition

Wir können uns das so vorstellen: Wir schreiben die vier Summanden auf einen Zylinder, dessen Umfang genau der Summandenlänge entspricht. Und addieren.

3.5 Fünf Summanden

Wir müssen wieder den Trick mit der zyklischen Addition anwenden (Abb. 6).

016393442622	016393442622
950819672131	950819672131
147540983606	147540983606
557377049180	557377049180
327868852459	327868852459
112222221111	122222211111
1999999999998	999999999999

Abb. 6: Zyklische Addition bei fünf Summanden

3.6 Sechs Summanden

0163934426	0163934426
2295081967	2295081967
2131147540	2131147540
9836065573	9836065573
7704918032	7704918032
7868852459	7868852459
2222222222	2222222222
29999999997	9999999999

Abb. 7: Sechs Summanden

3.7 Zehn Summanden

016393	016393
442622	442622
950819	950819
672131	672131
147540	147540
983606	983606
557377	557377
049180	049180
327868	327868
852459	852459
444444	444444
4999995	999999

Abb. 8: Zehn Summanden

3.8 Zwölf Summanden

01639	01639
34426	34426
22950	22950
81967	81967
21311	21311
47540	47540
98360	98360
65573	65573
77049	77049
18032	18032
78688	78688
52459	52459
55555	55555
599994	99999

Abb. 9: Zwölf Summanden

3.9 15 Summanden

0163	0163
9344	9344
2622	2622
9508	9508
1967	1967
2131	2131
1475	1475
4098	4098
3606	3606
5573	5573
7704	7704
9180	9180
3278	3278
6885	6885
2459	2459
6677	6776
69993	9999

Abb. 10: 15 Summanden

3.10 20 Summanden

Zunächst ist:

016 + 393 + 442 + 622 + 950 + 819 + 672 + 131 + 147 + 540 + 983 + 606 + 557 + 377 + 049 + 180 + 327 + 868 + 852 + 459 = 9990

Wir müssen einen Übertrag von 9 verschieben:

9 + 990 = 999

3.11 30 Summanden

Es ist:

```
01 + 63 + 93 + 44 + 26 + 22 + 95 + 08 + 19 + 67 + 21 + 31 +
14 + 75 + 40 + 98 + 36 + 06 + 55 + 73 + 77 + 04 + 91 + 80 +
             32 + 78 + 68 + 85 + 24 + 59 = 1485
```

Wir müssen zunächst einen dreistelligen Übertrag von 148 verschieben und dann weitere Überträge verschieben.

```
148 + 5 = 153
 15 + 3 = 18
  1 + 8 = 9
```

3.12 60 Summanden

Die Summe der 60 Ziffern der Periode

```
016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459
```

ist 270. Wir müssen einen zweistelligen Übertrag von 27 verschieben und dann einen weiteren Übertrag verschieben.

```
27 + 0 = 27
 2 + 7 = 9
```

4 Ausblick

Für welche Dezimalbrüche erhalten wir die Neunen?

Wie lässt sich das beweisen?

Gilt Analoges für Positionssysteme mit anderen Basen?