Hans Walser, [20150418]

Affine und projektive Kegelschnittbilder

Anregung: H. H., W.

1 Worum geht es?

Wir wollen zeigen, dass das affine Bild einer Ellipse wieder eine Ellipse, das affine Bild einer Parabel wieder eine Parabel und das affine Bild einer Hyperbel eine Hyperbel ist.

Das ist nicht trivial, da für projektive Abbildungen dieser Sachverhalt *nicht* gilt. Dies wird exemplarisch gezeigt.

2 Affine Abbildung

Eine reguläre affine Abbildung hat lineare Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \alpha x + \beta y + \varepsilon \\ \overline{y} &= \gamma x + \delta y + \varphi\end{aligned}$$

mit

$$\det\left(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\right) \neq 0 .$$

Der Vektor

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varphi \end{bmatrix}$$

ist der Translationsanteil, der für unsere Überlegungen weggelassen werden kann. Somit bleiben die Abbildungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \alpha x + \beta y \\ \overline{y} &= \gamma x + \delta y\end{aligned}$$

Wir brauchen rechentechnisch im Folgenden die Umkehrabbildung:

$$\begin{aligned}x &= a\overline{x} + b\overline{y} \\ y &= c\overline{x} + d\overline{y}\end{aligned} \tag{1}$$

2.1 Allgemeine Gleichung zweiten Grades

Eine allgemeine Gleichung zweiten Grades ist von der Form:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{2}$$

In Großvaters Formelsammlung (DMK/DPK 1992, S. 71) finden wir folgende Klassifizierung:

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}\right) \neq 0 \quad \text{und} \quad \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}\right) \begin{cases} > 0 & \text{Ellipse} \\ = 0 & \text{Parabel} \\ < 0 & \text{Hyperbel} \end{cases} \tag{3}$$

sowie

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}\right)=0 \quad \text{und} \quad \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}\right)\begin{cases} >0 & \text{zwei imaginäre Geraden mit reellem Schnittpunkt} \\ =0 & \text{zwei parallele Geraden} \\ <0 & \text{zwei sich schneidende Geraden} \end{cases}$$

Da eine affine Abbildung geradentreu ist, können wir den zweiten Fall für unsere Überlegungen weglassen.

2.2 Etwas Rechnung

Wir setzen (1) in (2) ein:

$$A(a\overline{x}+b\overline{y})^2+2B(a\overline{x}+b\overline{y})(c\overline{x}+d\overline{y})+C(c\overline{x}+d\overline{y})^2+2D(a\overline{x}+b\overline{y})+2E(c\overline{x}+d\overline{y})+F=0$$

Die lässt sich umformen zu:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{x}^2\left(Aa^2+2Bac+Cc^2\right)+2\overline{x}\overline{y}(Aab+Bad+Bbc+Ccd)+\overline{y}^2\left(Ab^2+2Bbd+Cd^2\right) \\ +2\overline{x}(Da+Ec)+2\overline{y}(Db+Ed)+F \end{array}\right\}=0$$

Mit

$$\begin{aligned} \overline{A} &= Aa^2+2Bac+Cc^2 \\ \overline{B} &= Aab+Bad+Bbc+Ccd \\ \overline{C} &= Ab^2+2Bbd+Cd^2 \\ \overline{D} &= Da+Ec \\ \overline{E} &= Db+Ed \\ \overline{F} &= F \end{aligned}$$

erhalten wir wiederum die Form (2).

Für das entscheidende Kriterium gemäß (3) ergibt sich:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{B} & \overline{C} \end{bmatrix}\right)=\left(Aa^2+2Bac+Cc^2\right)\left(Ab^2+2Bbd+Cd^2\right)-(Aab+Bad+Bbc+Ccd)^2$$

Dies lässt sich umformen zu:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{B} & \overline{C} \end{bmatrix}\right)=(ad-bc)^2\left(AC-B^2\right)=(ad-bc)^2\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}\right)$$

Der Faktor $(ad-bc)^2$ ist das Quadrat der inversen Abbildungsdeterminante. Bei einer regulären Abbildung ist diese nicht null, das Quadrat davon also positiv. Daher haben die Determinanten $\det\left(\begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{B} & \overline{C} \end{bmatrix}\right)$ und $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}\right)$ das gleiche Vorzeichen.

Gemäß (3) ist also die Aussage im ersten Abschnitt bewiesen.

3 Beispiel einer projektiven Abbildung

Wir werden exemplarisch zeigen, dass der Sachverhalt bei projektiven Abbildungen viel interessanter ist.

Eine projektive Abbildung hat gebrochen lineare Abbildungsgleichungen. Wir arbeiten mit dem Beispiel:

$$\overline{x} = \frac{x}{1+y}$$

$$\overline{y} = \frac{y}{1+y}$$

Diese Abbildung hat zunächst die x-Achse als Fixpunktgerade.

Nullsetzen des gemeinsamen Nenners in den Abbildungsgleichungen liefert die so genannte *Verschwindungsgerade*. In unserem Beispiel ist das die Gerade $y = -1$ (Abb. 1).

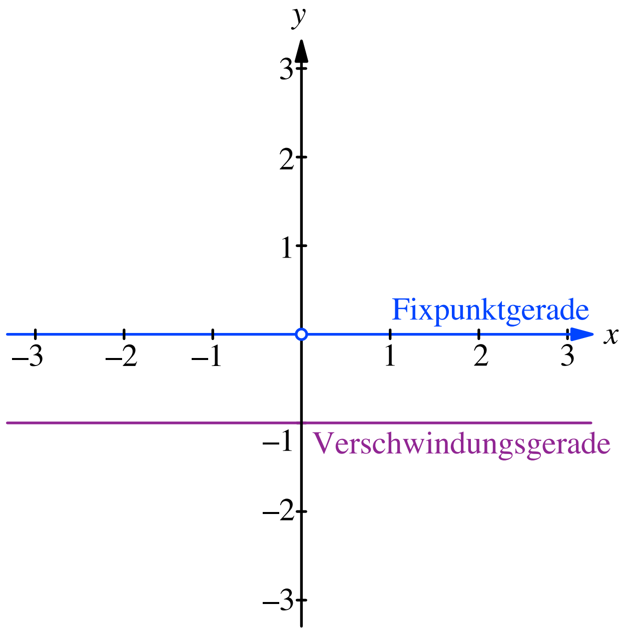

Abb. 1: Fixpunktgerade und Verschwindungsgerade

Die Punkte auf dieser Geraden werden in unendlich ferne Punkte abgebildet („Division durch null"). Das Bild der Verschwindungsgeraden ist entsprechend die unendlich ferne Gerade.

Für die Rechnungen benötigen wir wiederum die Abbildungsgleichungen der Umkehrabbildung. Diese sind:

$$x = \frac{\overline{x}}{1-\overline{y}}$$

$$y = \frac{\overline{y}}{1-\overline{y}}$$

3.1 Bild des Einheitskreises

Der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ berührt die Verschwindungsgerade. Dieser Punkt muss also verschwinden.

Rechnerisch erhalten wir:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\left(\tfrac{\overline{x}}{1-\overline{y}}\right)^2 + \left(\tfrac{\overline{y}}{1-\overline{y}}\right)^2 = 1$$

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 1 - 2\overline{y} + \overline{y}^2$$

$$\overline{y} = -\tfrac{1}{2}\overline{x}^2 + \tfrac{1}{2}$$

Das ist die Gleichung einer Parabel (Abb. 2).

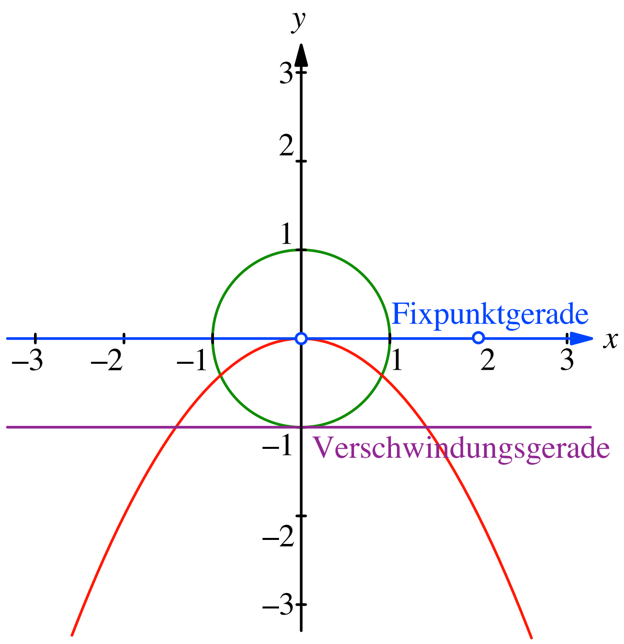

Abb. 2: Parabel

3.2 Bild des Kreises mit Radius ½

Der Kreis $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ hat mit der Verschwindungsgeraden keinen Punkt gemeinsam. Da kann nicht viel passieren. Rechnerisch erhalten wir (die „quadratische Ergänzung“ ist immer wieder spannend):

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$\left(\tfrac{\overline{x}}{1-\overline{y}}\right)^2 + \left(\tfrac{\overline{y}}{1-\overline{y}}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = \tfrac{1}{4}\left(1 - 2\overline{y} + \overline{y}^2\right)$$

$$\overline{x}^2 + \tfrac{3}{4}\left(\overline{y} + \tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{1}{3}$$

$$\left(\frac{\overline{x}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{y}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\right)^2 = 1$$

Das ist die Gleichung einer Ellipse (Abb. 3).

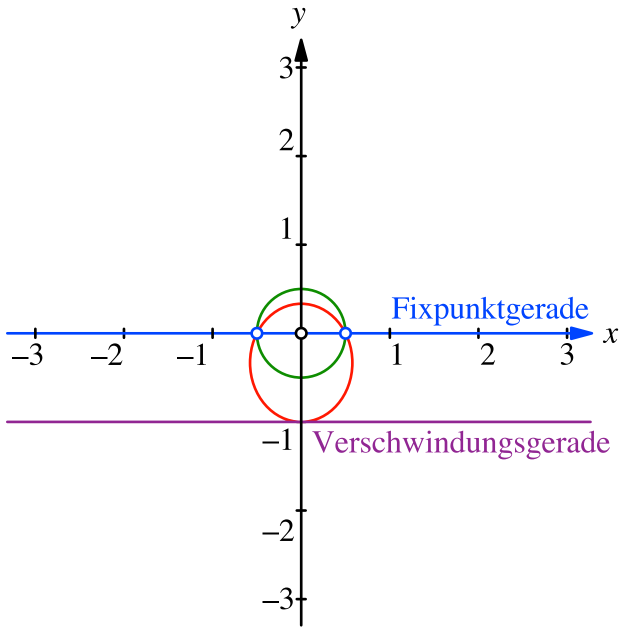

Abb. 3: Ellipse

Wir sehen, dass Urbild (dunkelgrün) und Bild (rot) sich auf der Fixpunktgeraden schneiden.

Dass die rote Bildellipse die Verschwindungsgerade berührt, hat nichts zu bedeuten, da die Verschwindungsgerade zum Urbildgehört. Das ist also reiner Zufall. Wenn wir jetzt allerdings die rote Ellipse abbilden, erhalten wir eine Parabel, nämlich $\bar{\bar{y}} = -\bar{\bar{x}}^2 + \frac{1}{4}$. Auch diese geht durch die gemeinsamen Fixpunkte.

3.3 Bild des Kreises mit Radius 2

Der Kreis $x^2 + y^2 = 4$ schneidet die Verschwindungsgerade in zwei Punkten.

Rechnerisch erhalten wir:

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\left(\tfrac{\bar{x}}{1-\bar{y}}\right)^2 + \left(\tfrac{\bar{y}}{1-\bar{y}}\right)^2 = 4$$

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 4\left(1 - 2\bar{y} + \bar{y}^2\right)$$

$$\bar{x}^2 - 3\left(\bar{y} - \tfrac{4}{3}\right)^2 = -\tfrac{4}{3}$$

$$\left(\frac{\bar{x}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2 - \left(\frac{\bar{y} - \frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}\right)^2 = -1$$

Das ist die Gleichung einer Hyperbel (Abb. 4).

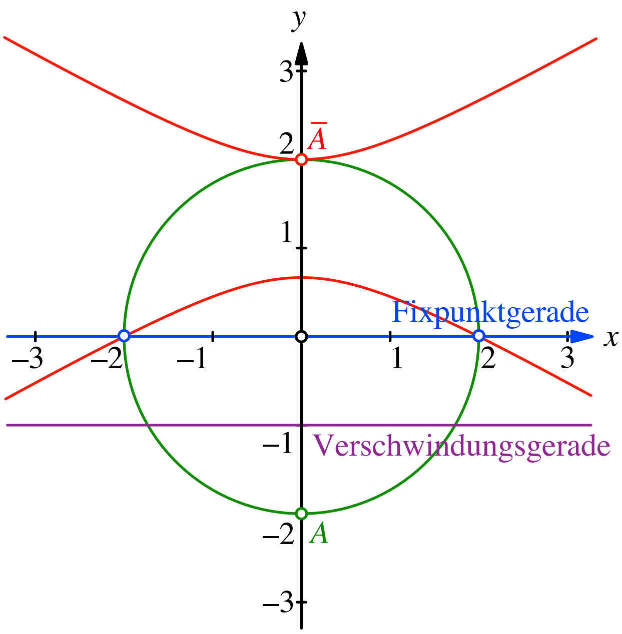

Abb. 4: Hyperbel

Der Urbildkreis und die Hyperbel schneiden sich auf der Fixpunktgeraden. Dass die Hyperbel und der Urbildkreis sich oben berühren, ist ein unglücklicher Zufall. Auf Grund der Abbildungsgleichungen ist nämlich $A(0,-2) \mapsto \overline{A}(0,+2)$.

Die Abbildung 5 illustriert, wie die Schnittpunkte des Urbildkreises mit der Fixpunktgeraden (das sind die Punkte, die ins Unendliche abrauschen) mit den Asymptoten der Hyperbel zusammenhängen. Sie legen die Richtungen der Asymptoten fest.

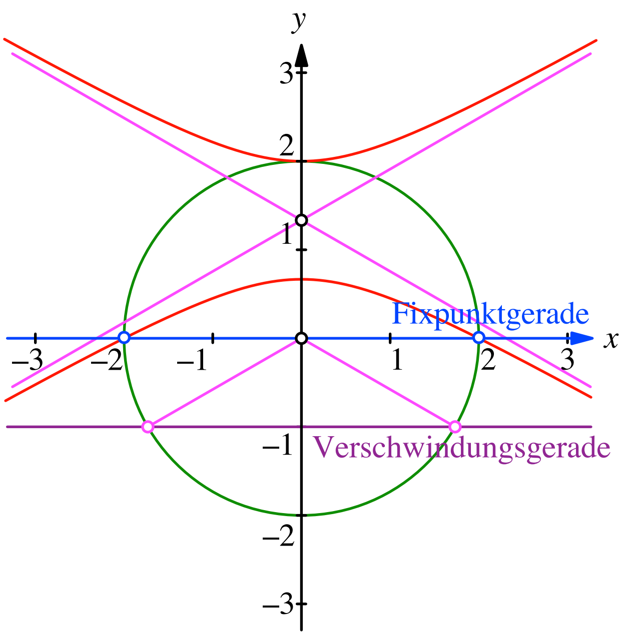

Abb. 5: Asymptoten

3.4 Résumé

Das Bild eines Kreises als Sonderfall einer Ellipse kann bei ein und derselben projektiven Abbildung eine Parabel, eine Ellipse oder eine Hyperbel sein. Entscheidend ist, ob der Kreis die Verschwindungsgerade berührt, meidet oder schneidet.

4 Philosophisches

Was auf der Verschwindungsgeraden liegt, geht sozusagen dann hinter die Kulissen. Bei einer affinen Abbildung bleibt alles auf der Bühne, was auf der Bühne ist. Und alles, was hinter den Kulissen ist, bleibt dort. Die unendlich ferne Gerade ist bei affinen Abbildungen eine Fixgerade (zum Beispiel bei Drehungen) oder gar eine Fixpunktgerade (zum Beispiel bei Translationen oder zentrischen Streckungen).

Eine Parabel ist eine an sich geschlossene Kurve, die mal kurz hinter den Kulissen die unendliche ferne Gerade küsst.

Literatur

DMK/DPK (1992): Deutschschweizerische Mathematikkommission / Deutschschweizerische Physikkommission: Formel und Tafeln. Mathematik – Physik. 5. Auflage. Zürich: Orell Füssli. ISBN 3 280 02162 6.