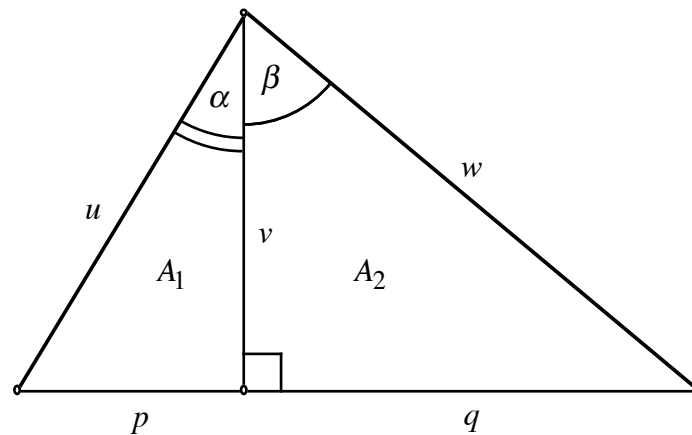


Additionstheoreme

1 Herleitung an einem Dreieck

Wir arbeiten in einem Dreieck mit den Bezeichnungen der Figur.



Bezeichnungsfigur

1.1 Additionstheorem für Sinus

Anregung von Chr. P., A.

$$\begin{aligned}A_{\Delta} &= A_1 + A_2 \\ \frac{1}{2}uw \sin(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2}uv \sin(\alpha) + \frac{1}{2}vw \sin(\beta) \\ \sin(\alpha + \beta) &= \frac{v}{w} \sin(\alpha) + \frac{v}{u} \sin(\beta)\end{aligned}$$

Nun ist aber $\frac{v}{u} = \cos(\alpha)$ und $\frac{v}{w} = \cos(\beta)$. Eingesetzt ergibt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

1.2 Additionstheorem für den Kosinus

1.2.1 Direktes Vorgehen

Wir verwenden den Kosinussatz.

$$\begin{aligned}p^2 &= u^2 + v^2 - 2uv \cos(\alpha) \\ q^2 &= v^2 + w^2 - 2vw \cos(\beta) \\ (p + q)^2 &= u^2 + w^2 - 2uw \cos(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

Andererseits ist aber:

$$\begin{aligned}(p + q)^2 &= p^2 + q^2 + 2pq \\ &= u^2 + v^2 - 2uv \cos(\alpha) + v^2 + w^2 - 2vw \cos(\beta) + 2pq\end{aligned}$$

Vergleich liefert:

$$\begin{aligned} u^2 + w^2 - 2uw \cos(\alpha + \beta) &= u^2 + v^2 - 2uv \cos(\alpha) + v^2 + w^2 - 2vw \cos(\beta) + 2pq \\ -2uw \cos(\alpha + \beta) &= 2v^2 - 2uv \cos(\alpha) - 2vw \cos(\beta) + 2pq \\ \cos(\alpha + \beta) &= -\frac{v^2}{uw} + \frac{v}{w} \cos(\alpha) + \frac{v}{u} \cos(\beta) - \frac{pq}{uw} \end{aligned}$$

Wegen $\frac{v}{u} = \cos(\alpha)$, $\frac{v}{w} = \cos(\beta)$, $\frac{p}{u} = \sin(\alpha)$ und $\frac{q}{w} = \sin(\beta)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

1.2.2 Basierend auf Additionstheorem für Sinus

Wir gehen davon aus, dass die Formel

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

gegeben ist. Das Additionstheorem für den Kosinus können wir daraus auf zwei verschiedenen Wegen herleiten. — Mit beiden Methoden kann auch umgekehrt das Additionstheorem des Sinus aus dem des Kosinus hergeleitet werden.

1.2.2.1 Überschieben

Wir verwenden die Relationen $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$ und $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \beta\right) &= \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos(\beta) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

Bei dieser Herleitung wurde das Bogenmaß vorausgesetzt. Im Gradmaß muss $\frac{\pi}{2}$ durch 90° ersetzt werden.

1.2.2.2 Ableiten

Wir verwenden die Relationen $\frac{d}{d\alpha} \sin(\alpha) = \cos(\alpha)$ und $\frac{d}{d\alpha} \cos(\alpha) = -\sin(\alpha)$. Wir leiten nun die Terme des Additionstheorems für den Sinus auf beiden Seiten partiell nach α ab:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \sin(\alpha + \beta) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

Bei dieser Herleitung wurde das Bogenmaß vorausgesetzt. Bei Verwendung des Gradmaßes erhalten wir auf beiden Seiten die innere Ableitung $\frac{2\pi}{360^\circ}$ als Faktor und müssen dann durch diesen Faktor dividieren. — Derselbe Trick geht auch bei den Additionstheoremen der hyperbolischen Funktionen.

2 Herleitung über Drehmatrizen

Die Additionstheoreme lassen sich einfach über Drehmatrizen herleiten:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Andererseits ist die Zusammensetzung zweier Drehungen mit den Drehwinkeln α und β eine Drehung um $\alpha + \beta$. Daher ist:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

Vergleich ergibt die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus.