Hans Walser, [20140817]

Additionstheorem für Verhältnisse im Dreieck

Herkunft: R., B.

1 Das Theorem

Die Abbildung 1 zeigt die geometrische Situation:

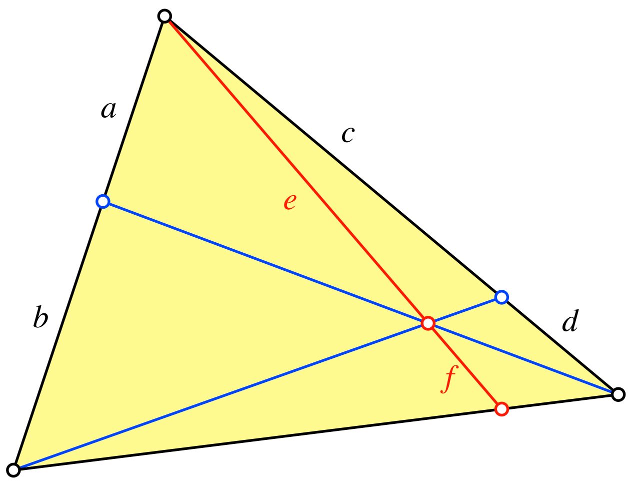

Abb. 1: Situation

Mit den Bezeichnungen der Abbildung 1 gilt:

$$\frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

2 Beweisskizze

Die Aussage des Theorems ist affin invariant. Wir können daher mit dem Dreieck der Abbildung 2 arbeiten.

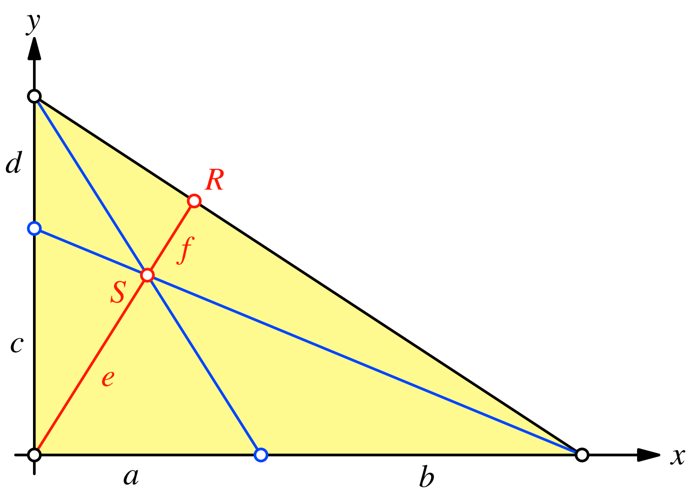

Abb. 2: Beweisfigur

Für den Schnittpunkt S erhalten wir mit einiger Rechnung die Koordinaten:

$$S=\left(\frac{ad(a+b)}{ad+bc+bd},\frac{bc(c+d)}{ad+bc+bd}\right)$$

vom Punkt R benötigen wir nur die x-Koordinate:

$$x_R=\frac{ad(a+b)}{ad+bc}$$

Es ist dann:

$$\frac{e+f}{e}=\frac{x_R}{x_S}=\frac{ad+bc+bd}{ad+bc}$$

$$1+\frac{f}{e}=1+\frac{bd}{ad+bc}$$

Somit ist:

$$\frac{f}{e}=\frac{bd}{ad+bc}$$

$$\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

3 Eine Ungleichung

Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung 3.

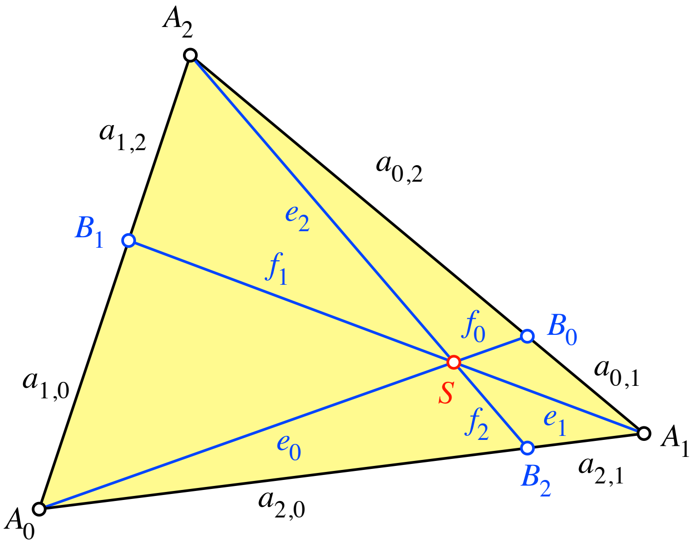

Abb. 3: Bezeichnungen

Dreimalige Anwendung des Additionstheorems liefert:

$$\frac{e_0}{f_0}+\frac{e_1}{f_1}+\frac{e_2}{f_2}=\left(\frac{a_{2,0}}{a_{2,1}}+\frac{a_{1,0}}{a_{1,2}}\right)+\left(\frac{a_{0,1}}{a_{0,2}}+\frac{a_{2,1}}{a_{2,0}}\right)+\left(\frac{a_{1,2}}{a_{1,0}}+\frac{a_{0,2}}{a_{0,1}}\right)$$

$$=\underbrace{\frac{a_{0,1}}{a_{0,2}}+\frac{a_{0,2}}{a_{0,1}}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{a_{1,2}}{a_{1,0}}+\frac{a_{1,0}}{a_{1,2}}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{a_{2,0}}{a_{2,1}}+\frac{a_{2,1}}{a_{2,0}}}_{\geq 2}\geq 6$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn S der Schwerpunkt ist.

4 Bemerkung

Das Theorem erinnert von ferne an den Satz von Ceva. Allerdings sind im Satz von Ceva die relevanten Verhältnisse *multiplikativ* verbunden.