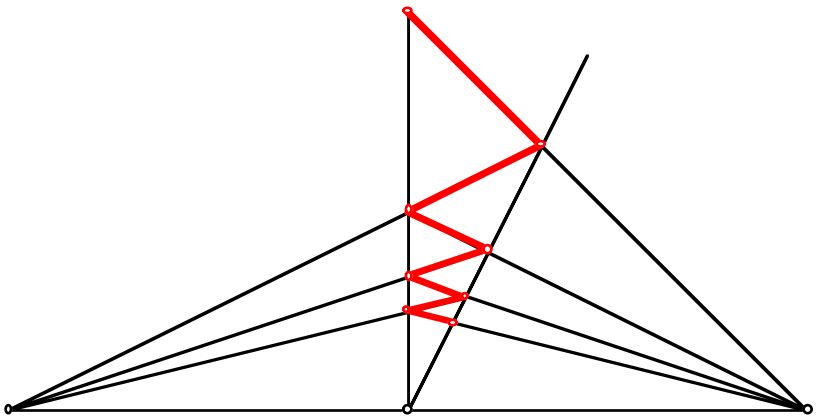
Hans Walser, [20090124a]

Abnehmende Zickzacklinien

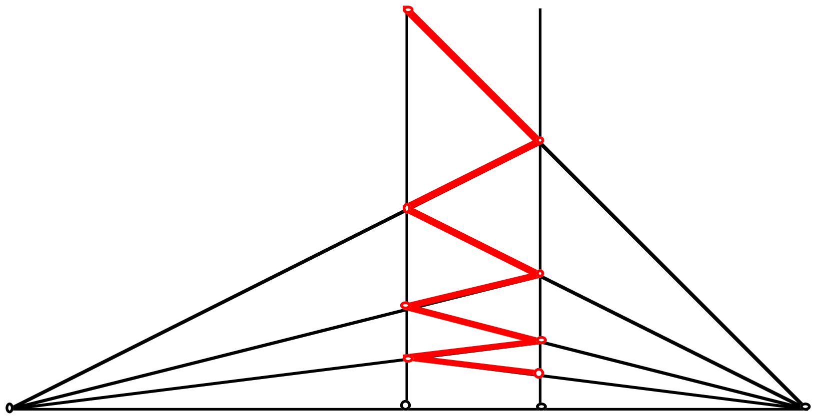
Anregung: R. E.

1 Fragestellung

Wie verhalten sich die beiden Zickzacklinien?



Harmonisch abnehmende Zickzacklinie

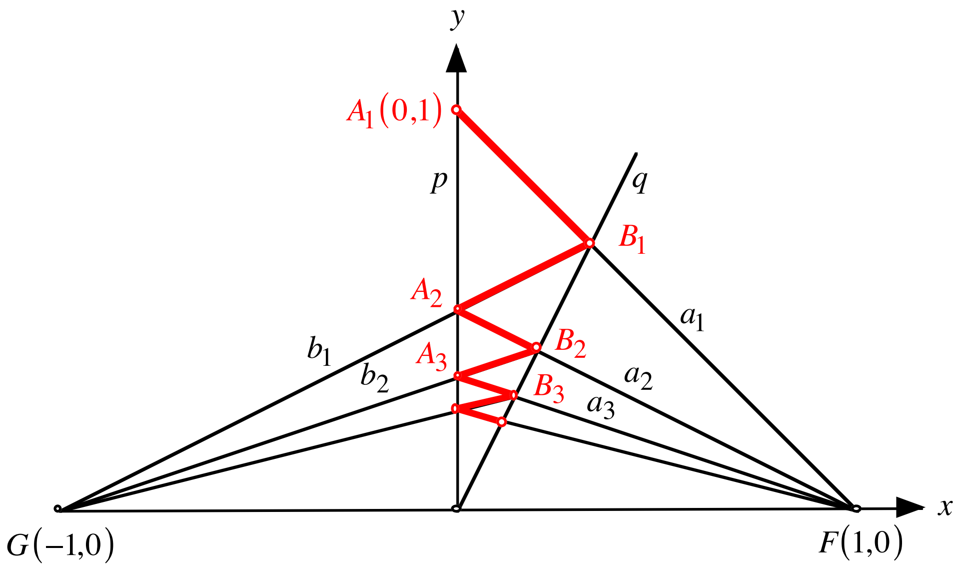


Exponentiell abnehmende Zickzacklinie

2 Bearbeitung

2.1 Harmonisch abnehmende Zickzacklinie

Wir führen ein Koordinatensystem und Bezeichnungen gemäß Arbeitsfigur ein. Gegeben seien die drei Punkte $A_1(0,1)$, $F(1,0)$ und $G(-1,0)$ sowie die Gerade q mit der Gleichung $y = 2x$. Die Gerade p ist die y-Achse.



Arbeitsfigur

Wir verbinden $A_1(0,1)$ mit $F(1,0)$ (Gerade a_1) und schneiden mit q, das gibt B_1. Nun schneiden wir B_1G (Gerade b_1) mit p und erhalten A_2. Schnitt von A_2F mit q gibt B_2 und so weiter.

Wir erhalten dann der Reihe nach: $B_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $A_2\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $B_2\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$, $A_3\left(0,\frac{1}{3}\right)$, ... Allgemein gilt:

$$A_n\left(0,\tfrac{1}{n}\right), B_n\left(\tfrac{1}{2n+1},\tfrac{2}{2n+1}\right), n \in \mathbb{N}$$

Die y-Koordinaten bilden abnehmende harmonische Folgen.

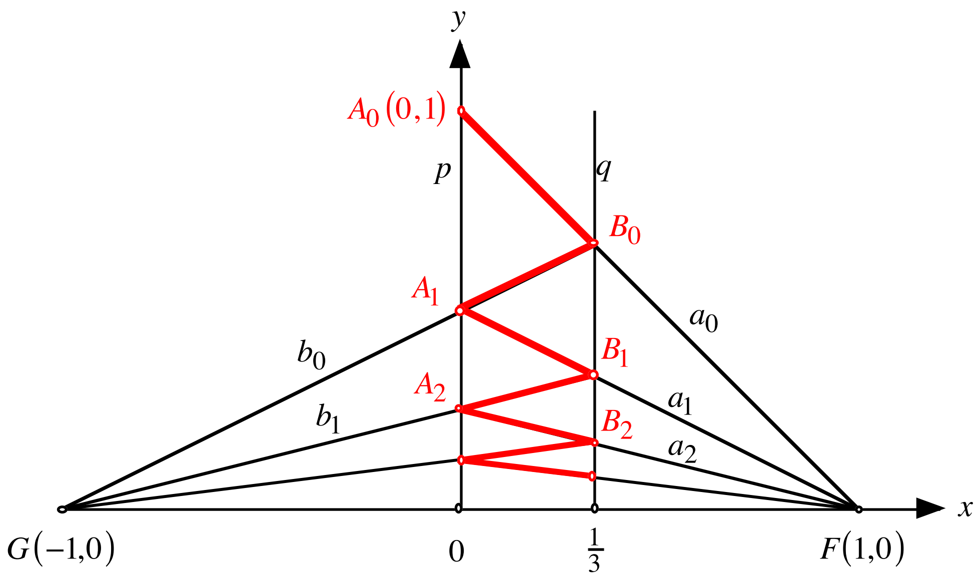
Beweis induktiv:

(I) $A_1(0,1) = A_1\left(0,\frac{1}{1}\right)$ ist gegeben.

(II) Aus $A_n\left(0,\frac{1}{n}\right)$ erhalten wir für die Gerade $a_n = A_nF$ die Gleichung $a_n : y = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}x$. Schnitt mit der Geraden $q : y = 2x$ ergibt $B_n\left(\frac{1}{2n+1},\frac{2}{2n+1}\right)$. Die Gerade $b_n = B_nG$ hat dann die Gleichung $b_n : y = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}x$. Schnitt mit der Geraden $p : x = 0$ liefert $A_{n+1}\left(0,\frac{1}{n+1}\right)$. $\square$

2.2 Exponentiell abnehmende Zickzacklinie

Wir führen wiederum ein Koordinatensystem und Bezeichnungen gemäß Arbeitsfigur ein. Die Nummerierung der Punkte $A_n\left(0, y_{A_n}\right)$ und $B_n\left(\frac{1}{3}, y_{B_n}\right)$ beginnt aus ästhetischen Gründen mit Null. Gegeben seien die drei Punkte $A_0(0,1)$, $F(1,0)$ und $G(-1,0)$ sowie die senkrechte Gerade q mit der Gleichung $x = \frac{1}{3}$. Die Gerade p ist wiederum die y-Achse.



Arbeitsfigur

Wir verbinden $A_0(0,1)$ mit $F(1,0)$ (Gerade a_0) und schneiden mit q, das gibt B_0. Nun schneiden wir B_0G (Gerade b_0) mit p und erhalten A_1. Schnitt von A_1F mit q gibt B_1 und so weiter.

Wir erhalten der Reihe nach: $B_0\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (wie im oberen Fall der harmonischen Zickzacklinie), $A_1\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (ebenfalls wie oben), $B_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $A_2\left(0, \frac{1}{4}\right)$, ... Allgemein gilt:

$$A_n\left(0, \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right), B_n\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Die y-Koordinaten sind geometrische Folgen mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$; wir haben also einen exponentiellen Zerfall.

Beweis induktiv:

(I) $A_0(0,1) = A_0\left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^0\right)$, also $y_{A_0} = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$, ist gegeben.

(II) Auf Grund der Strahlensätze ist $\frac{y_{B_n}}{y_{A_n}} = \frac{2}{3}$, also $y_{B_n} = \frac{2}{3} y_{A_n}$. Weiter ist $\frac{y_{A_{n+1}}}{y_{B_n}} = \frac{3}{4}$, also $y_{A_{n+1}} = \frac{3}{4} y_{B_n}$. Somit ist $y_{A_{n+1}} = \frac{3}{4}\frac{2}{3} y_{A_n} = \frac{1}{2} y_{A_n}$. Aus $y_{A_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ergibt sich daraus $y_{A_{n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. □