Hans Walser, [20150307]

Ableitung der Sinusfunktion

1 Heuristisches Vorgehen

Zum Funktionsgraphen der Sinusfunktion werden die Steigungen graphisch ermittelt und als Funktion skizziert. Das legt die Vermutung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(t)=\cos(t)$ nahe.

2 Einsicht und Beweis

Mit dem Additionstheorem für die Sinusfunktion erhalten wir:

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(t+h)-\sin(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(t)\cos(h)+\cos(t)\sin(h)-\sin(t)}{h}\\ &= \cos(t)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}}_{L_1}+\sin(t)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}}_{L_2}\end{aligned}$$

In beiden Limites haben wir eine „Null zu null“-Situation. Das mahnt zur Vorsicht.

2.1 Experimentell numerisches Vorgehen

Wir erhalten:

h	$\frac{\sin(h)}{h}$	$\frac{\cos(h)-1}{h}$
1.00000	0.84147	–0.45970
0.10000	0.99833	–0.04996
0.01000	0.99998	–0.00500
0.00100	1.00000	–0.00050
0.00010	1.00000	–0.00005
0.00001	1.00000	–0.00000

Tab. 1: Experiment

Auf Grund des Experimentes vermuten wir $L_1=1$ und $L_2=0$. Damit haben wir erneut die Vermutung:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(t)=\cos(t)$$

2.2 Beweis

2.2.1 Beweis für den ersten Grenzwert. Sandwichbeweis

Wir arbeiten mit den drei in der Abbildung 1 eingezeichneten Figuren.

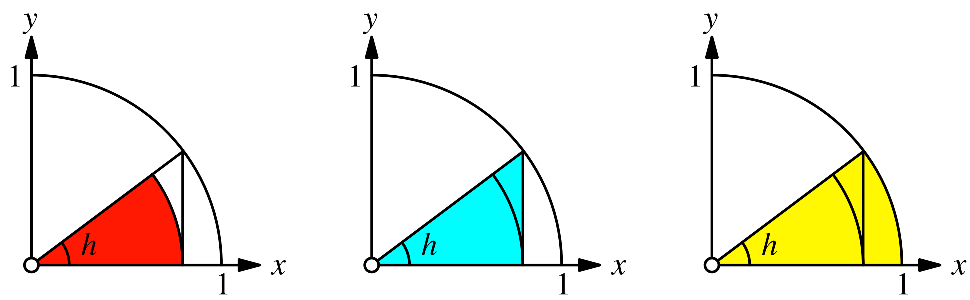

Abb. 1: Beweisfiguren

Die drei Figuren haben der Reihe nach die Flächeninhalte $\frac{1}{2}h\cos^2(h)$, $\frac{1}{2}\cos(h)\sin(h)$ und $\frac{1}{2}h$. Es ist auf Grund der Abbildung 1:

$$\tfrac{1}{2}h\cos^2(h) < \tfrac{1}{2}\cos(h)\sin(h) < \tfrac{1}{2}h$$

Daraus ergibt sich:

$$\cos(h) < \frac{\sin(h)}{h} < \frac{1}{\cos(h)}$$

Für den Limes $h \to 0$ erhalten wir daher:

$$\underbrace{\lim_{h\to 0}\cos(h)}_{1} \leq \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}}_{L_1} \leq \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(h)}}_{1}$$

Dabei ist zu beachten, dass beim Grenzübergang die <-Relation durch die ≤-Relation zu ersetzen ist. Dies kann am Beispiel $\frac{1}{n} > 0$, aber $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ eingesehen werden.

Somit ist L_1 eingeklemmt zwischen 1 und 1 und daher selber 1. Die Mathematiker verwenden für diesen Gedankengang die etwas widersprüchliche Formulierung „exakte Abschätzung“.

Aus $\lim\limits_{h\to0}\frac{\sin(h)}{h}=1$ folgt unmittelbar: $\lim\limits_{h\to0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=1$. Wir werden diesen Sachverhalt im Folgenden verwenden.

2.2.2 Beweis für den zweiten Grenzwert

2.2.2.1 Geometrische Überlegung

Das grüne rechtwinklige Dreieck der Abbildung 2 hat die Hypotenusenlänge $2\sin\left(\frac{h}{2}\right)$. Der kleinere der beiden spitzen Winkel ist $\frac{h}{2}$. Daher misst die kurze Kathete $2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)$.

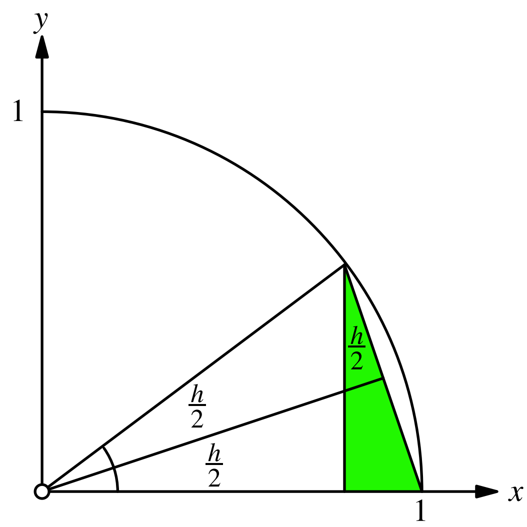

Abb. 2: Geometrische Überlegung

Andererseits ist die kurze Kathete auch $1-\cos(h)$. Somit haben wir:

$$\lim_{h\to0}\frac{\cos(h)-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}=-\underbrace{\lim_{h\to0}\sin\left(\frac{h}{2}\right)}_{0}\underbrace{\lim_{h\to0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{1}=-0$$

2.2.2.2 Berechnung mit Additionstheorem

Mit dem Additionstheorem für die Kosinusfunktion erhalten wir:

$$\frac{\cos(h)-1}{h}=\frac{\cos\left(\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)-1}{h}=\frac{\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)-1}{h}=\frac{1-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)-1}{h}=-\frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=-\sin\left(\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

Somit ist:

$$L_2 = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = -\underbrace{\lim_{h \to 0} \sin\left(\frac{h}{2}\right)}_{0} \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{1} = -0$$

2.3 Zusammenfassung

Für die Ableitung der Sinusfunktion gilt daher:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin(t) = \cos(t)$$

Uff.