Hans Walser, [20130727]

Dreieck und Sechseck

Anregung: H. K. S., L.

1 Worum geht es?

Es wird ein regelmäßiges Dreieck und ein dazu flächengleiches regelmäßiges Sechseck diskutiert. Dabei werden geometrische und rechnerische Methoden sowie Zerlegungsgleichheiten verwendet.

2 Im Quadratraster

Wir arbeiten in einem Quadratraster der Maschenweite 1 (Abb. 1).

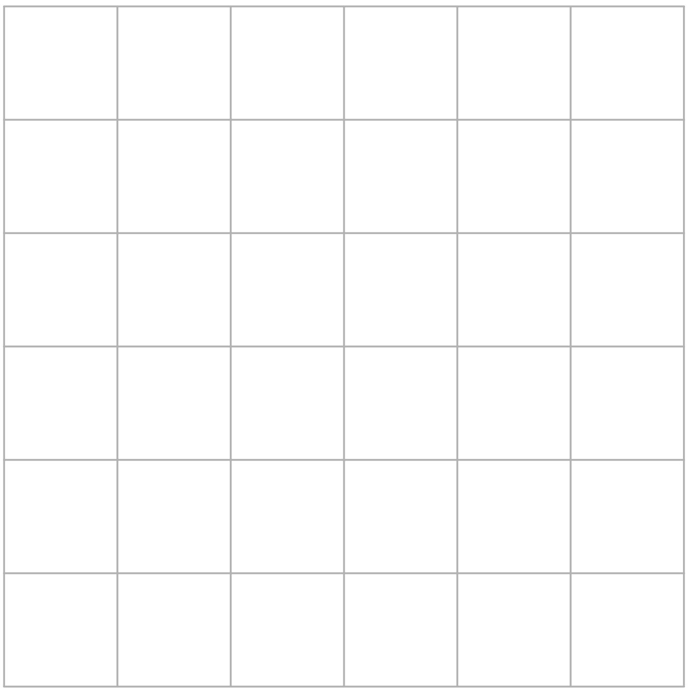

Abb. 1: Quadratraster

Wir drehen nun Kopien dieses Rasters um 120° und 240° (Abb. 2).

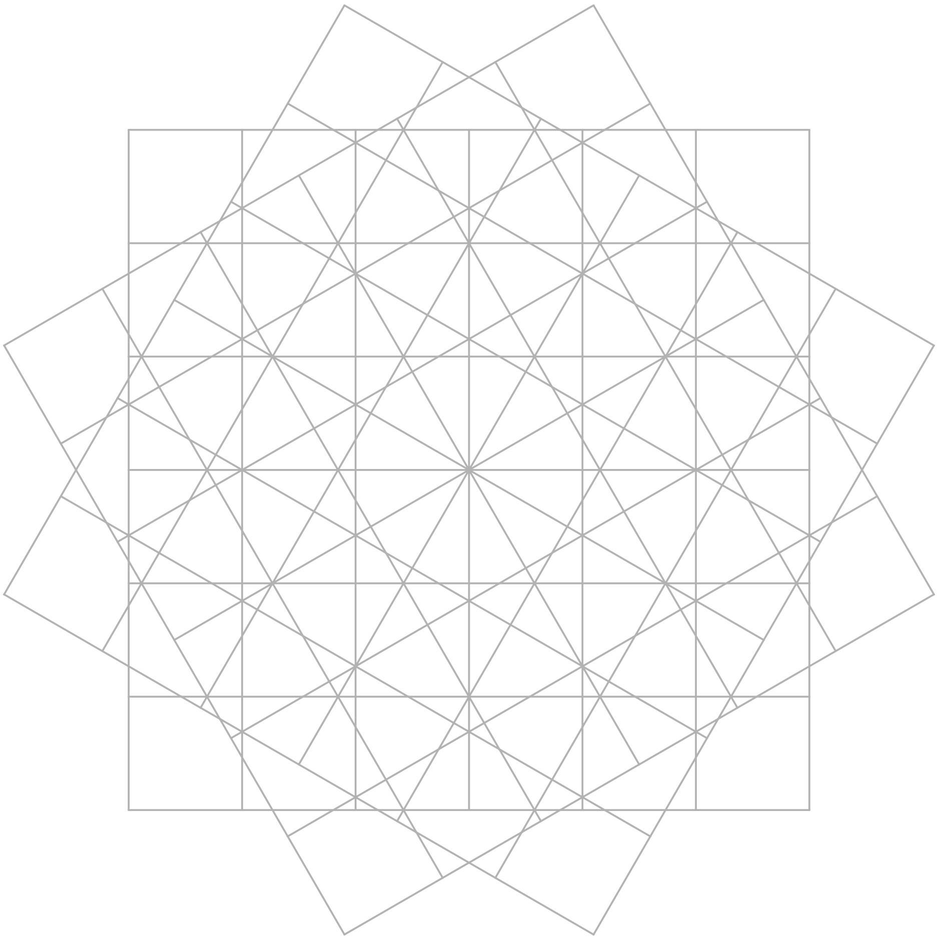

Abb. 2: Verdrehte Raster

Wir erkennen Punkte, welche ein regelmäßiges Zwölfeck bilden (Abb. 3).

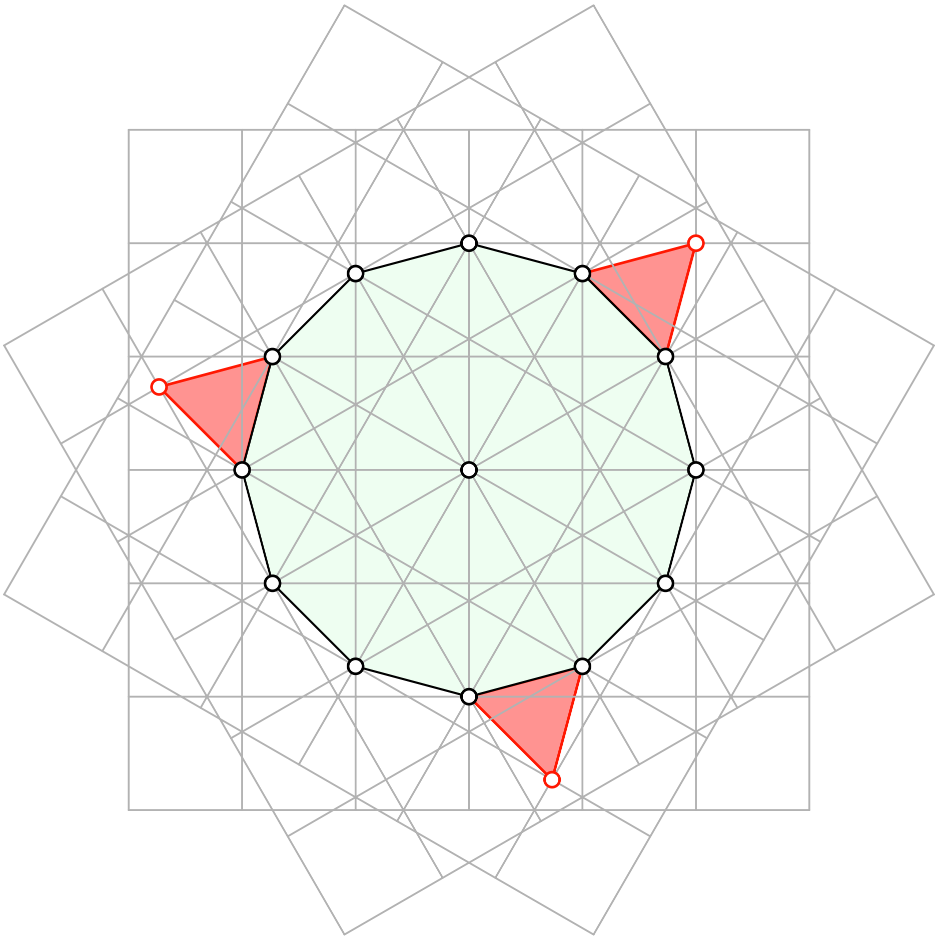

Abb. 3: Zwölfeck

Wenn wir den Zwölfeckseiten regelmäßige Dreiecke aufsetzen, kommen deren Außenecken auf Rasterunkte eines der drei Raster zu liegen.

3 Dreieck und Sechseck

Nun führen wir ein regelmäßiges Dreieck (rot) und ein regelmäßiges Sechseck (blau) in die Figur ein gemäß Abbildung 4.

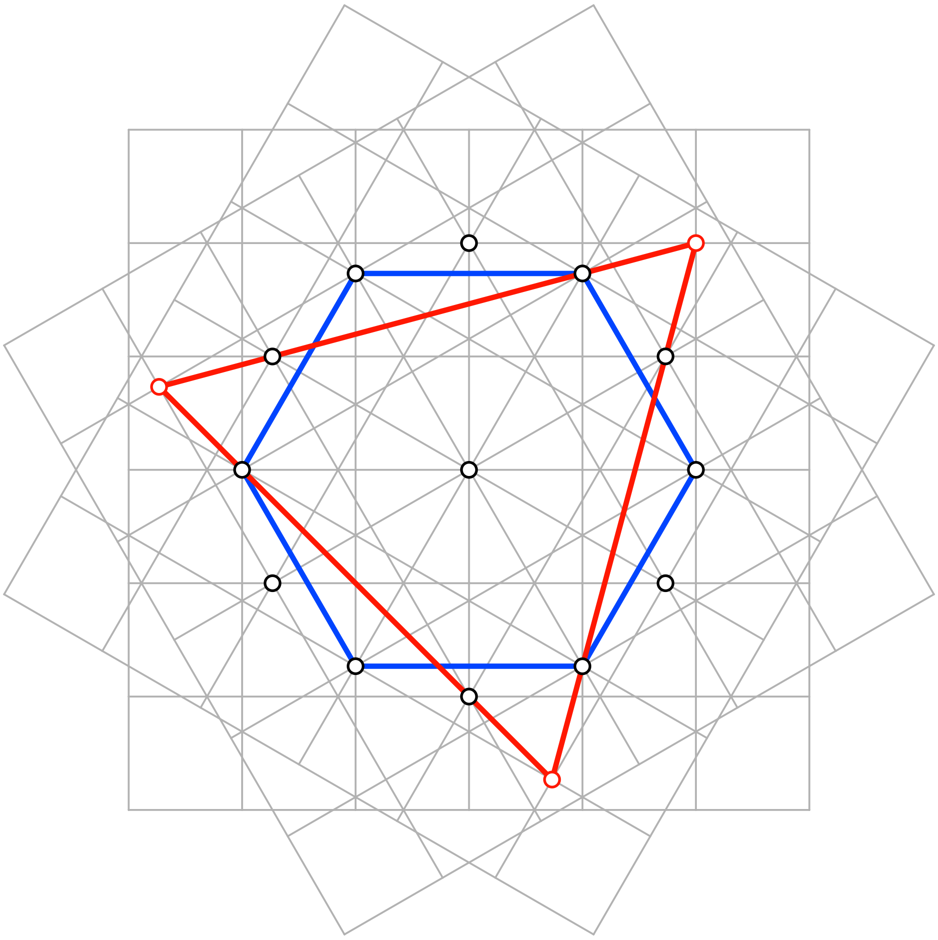

Abb. 4: Dreieck und Sechseck

Das rote Dreieck und das blaue Sechseck sind flächengleich.

Dies kann auf verschiedene Arten eingesehen werden.

4 Flächenverwandlungen

Wir können wir in der Schule mit Flächenverwandlungen arbeiten.

Zunächst haben das rote Dreieck $T_1T_2T_3$ und das blaue Sechseck $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$ das graue Dreieck $A_1A_5A_9$ gemeinsam (Abb. 5).

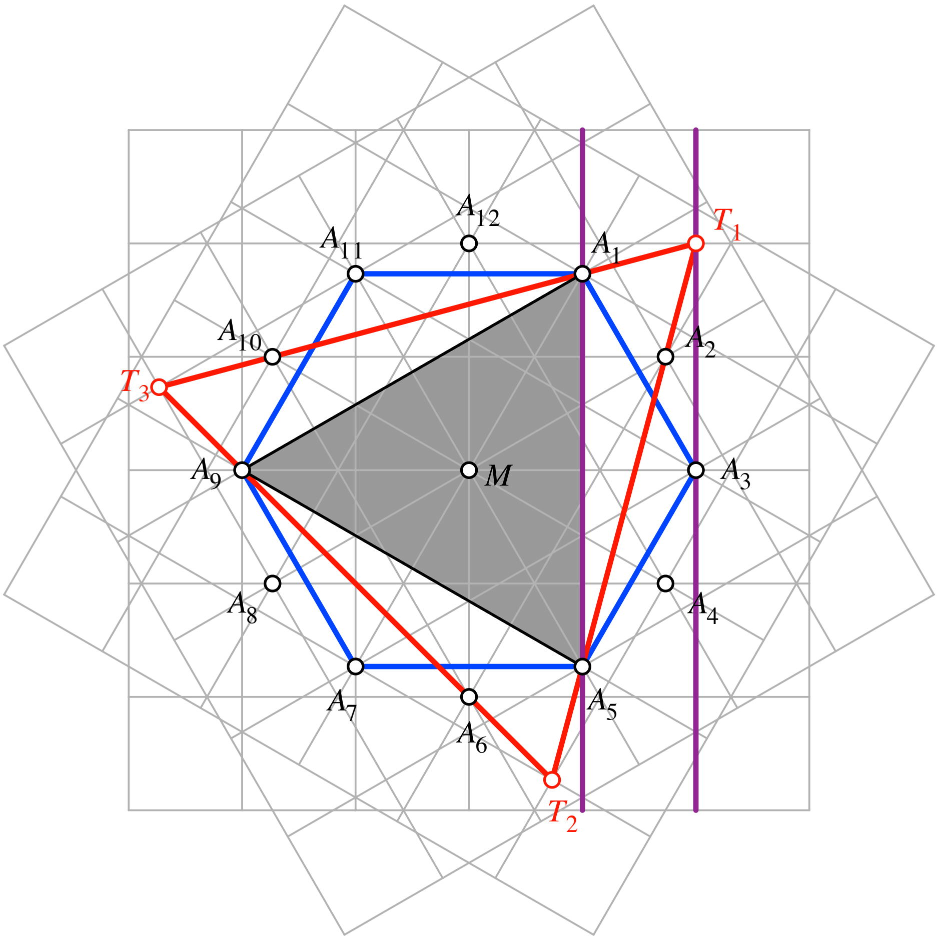

Abb. 5: Flächenverwandlungen

Aus der Parallelität der beiden violetten Rasterlinien folgt die Flächengleichheit der beiden Dreiecke $A_1T_1A_5$ und $A_1A_3A_5$. Diese beiden Dreiecke haben eine gemeinsame Grundlinie A_1A_5 und die gleiche Höhe 1 (Maschenweite des Rasters). Analog können wir an den anderen zwei Seiten des grauen Dreiecks überlegen.

5 Rechnerischer Nachweis

Das rote Dreieck hat den Umkreisradius $2\sqrt{2}$ und damit den Flächeninhalt $6\sqrt{3}$.

Das blaue Sechseck hat den Umkreisradius 2 und damit den gleichen Flächeninhalt $6\sqrt{3}$.

6 Zerlegungsbeweis

Die Abbildung 6 zeigt das wesentliche Puzzle-Teil.

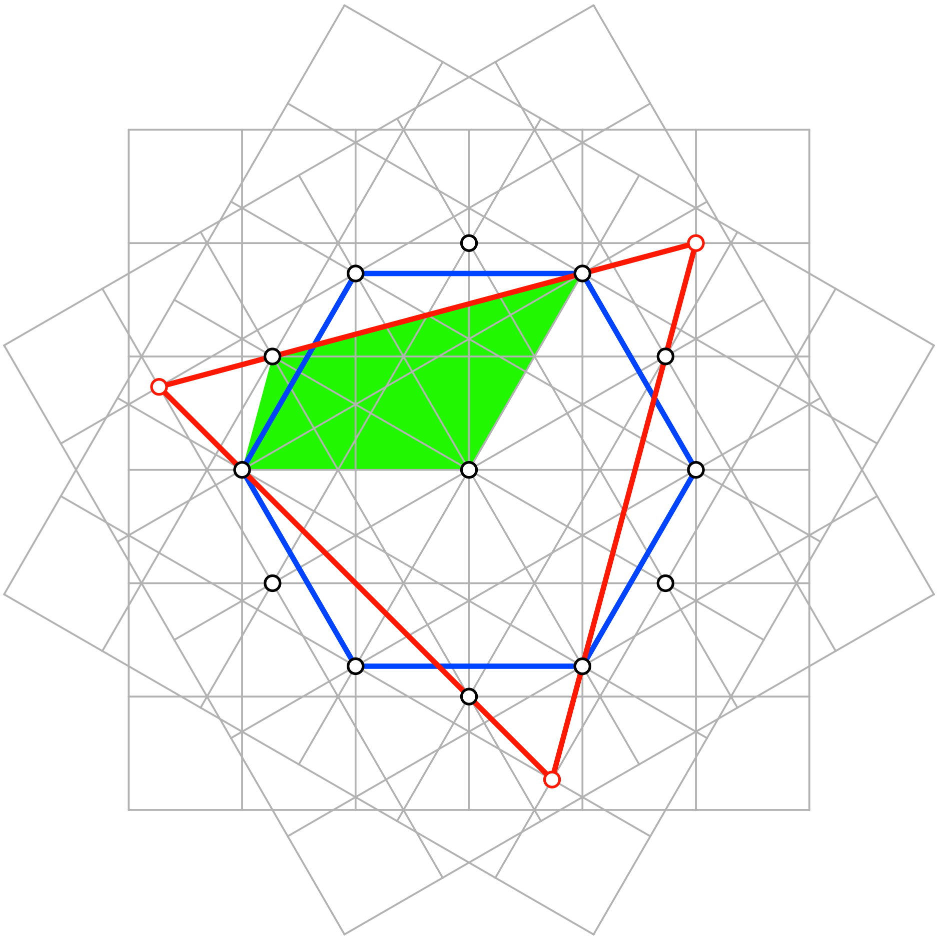

Abb. 6: Puzzle-Teil

Mit drei solcher Puzzle-Teilen (jeweils um 120° und 240° verdreht) können wir das rote Dreieck bis auf drei kleine Dreiecke an den Spitzen auffüllen (Abb. 7).

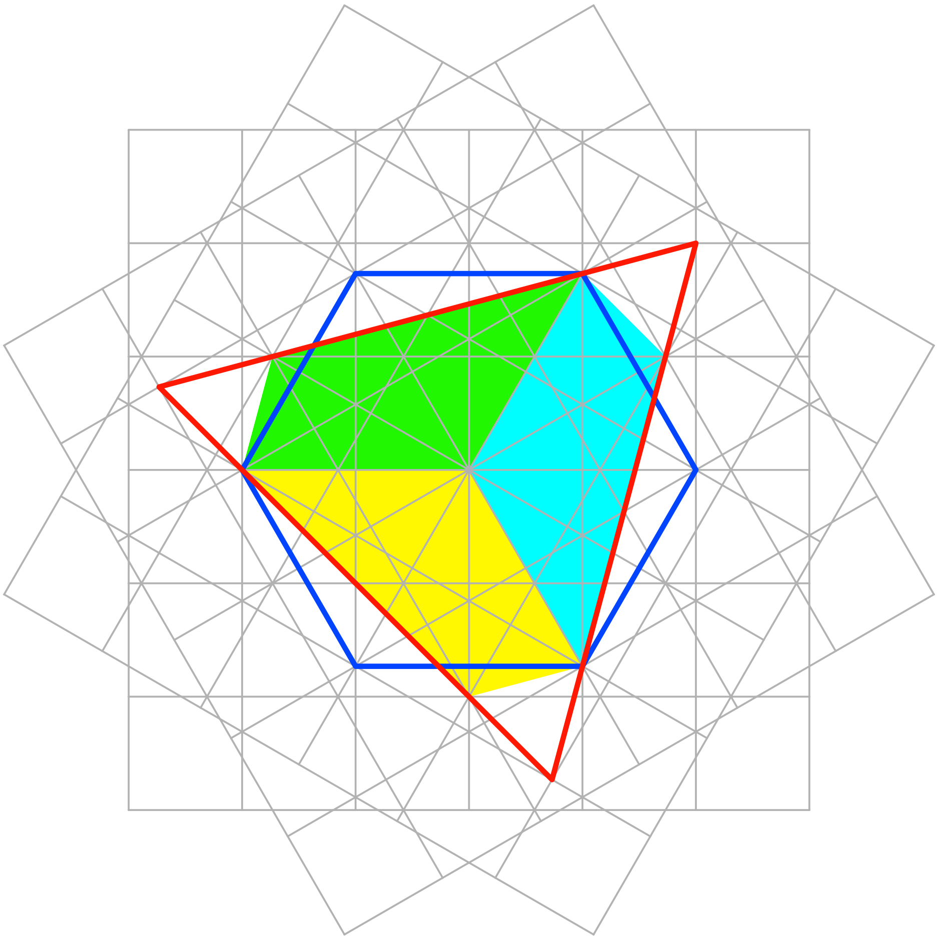

Abb. 7: Dreieck fast voll

Ebenso können wir damit das blaue Sechseck bis auf ein Dreieck im Zentrum auffüllen (Abb. 8).

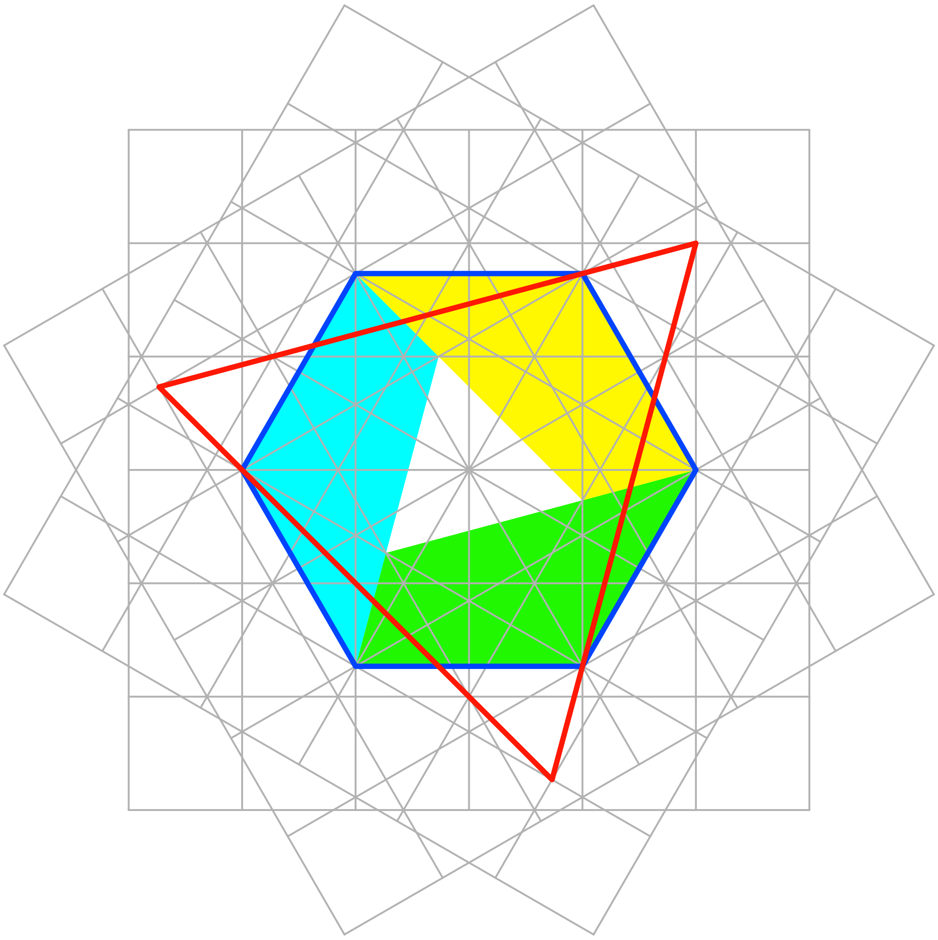

Abb. 8: Sechseck mit Loch

Als Restproblem müssen wir das Lochdreieck im blauen Sechseck auf die drei Eckdreiecke im roten Dreieck aufteilen. Wir haben das Problem der „Dreiecksdrittelung“. Die Abbildung 9 zeigt, wie das geht.

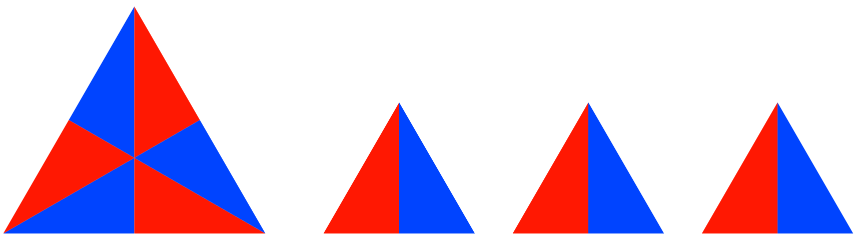

Abb. 9: Dreiecksdrittelung

Damit erhalten wir schließlich die gemeinsame Zerlegung des Dreiecks mit dem flächengleichen Sechseck (Abb. 10).

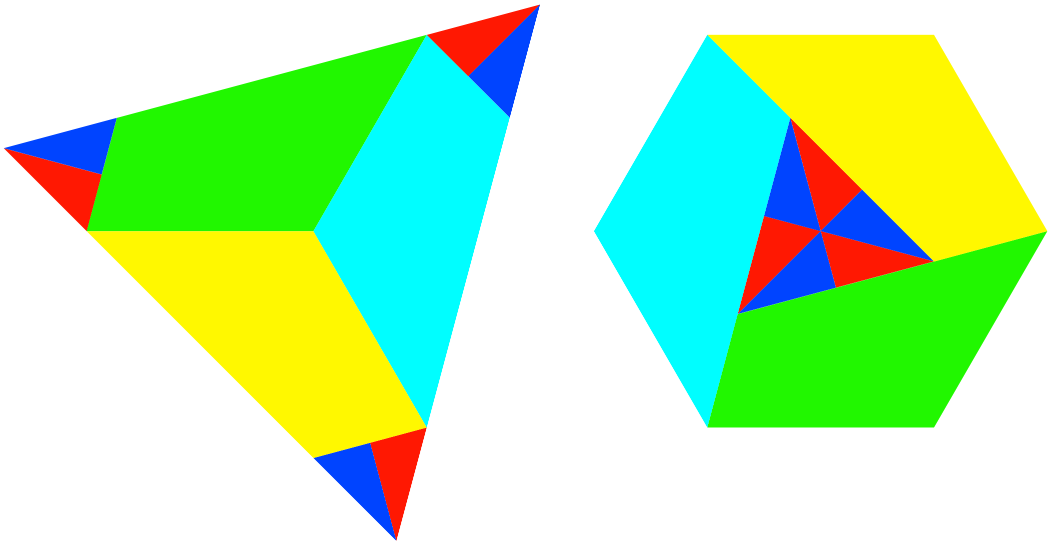

Abb. 10: Zerlegungsgleichheit