Hans Walser, [20230917]

18-Eck

Anregung: Helmut Mallas, Flensburg

1 Worum geht es?

Eine klassische Winkelaufgabe.
Arbeiten im regelmäßigen 18-Eck.

2 Problemstellung

Gesucht ist der gelb markierte Winkel in der Abbildung 1.

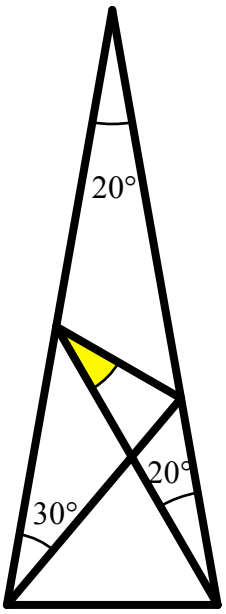

Abb. 1: Wie groß ist der gelbe Winkel?

3 Bearbeitung

3.1 Regelmäßiges 18-Eck

Das regelmäßige 18-Eck hat den Zentriwinkel 20°. Das passt zu unserer Aufgabe.
Für spätere Berechnungen setzen wir den Umkreisradius des 18-Ecks auf 1.

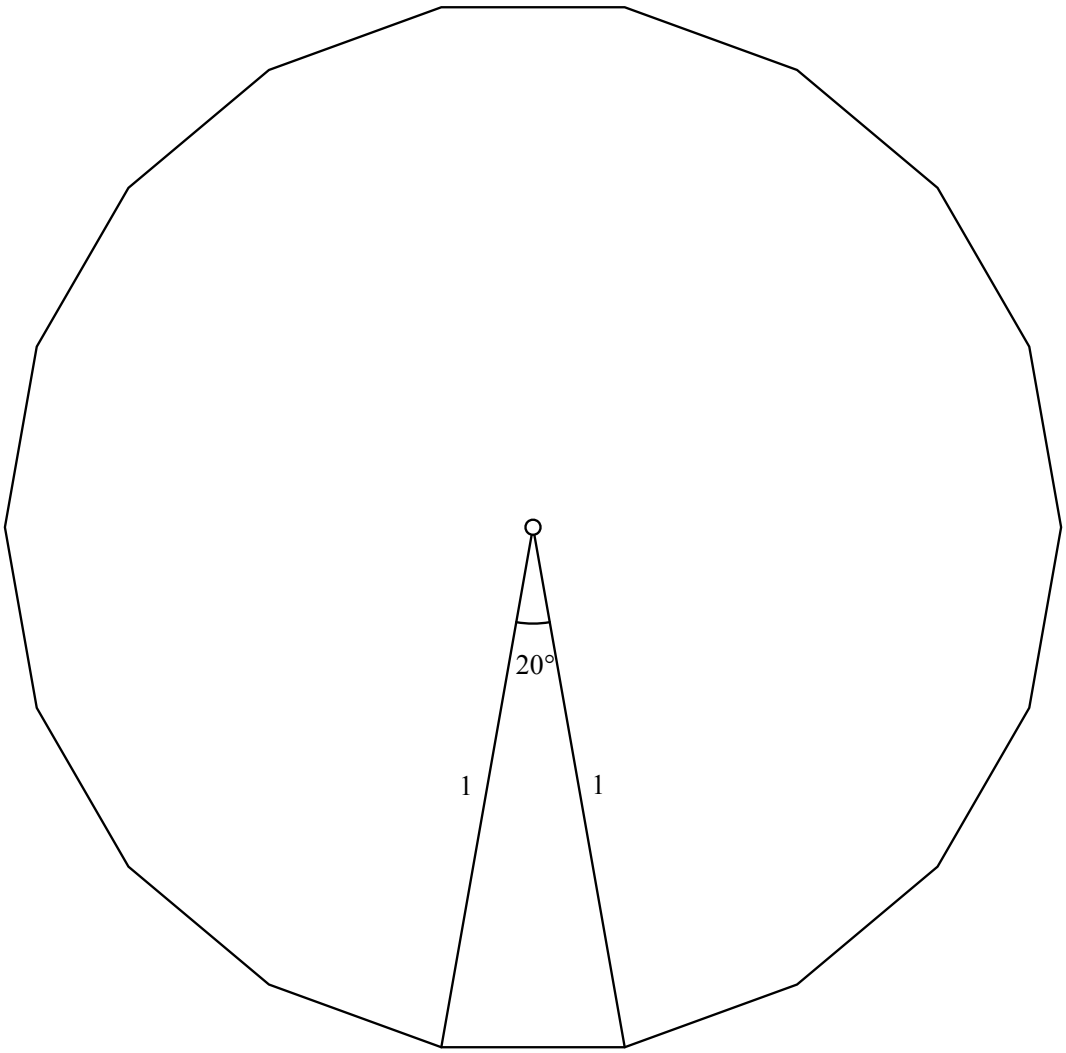

Abb. 2: Regelmäßiges 18-Eck

3.2 Schnittpunkte von Diagonalen

Aus Symmetriegründen schneiden sich die drei Diagonalen in der Abbildung 3 in einem Punkt, da die schwarze Diagonale eine Symmetrieachse des 18-Ecks ist.

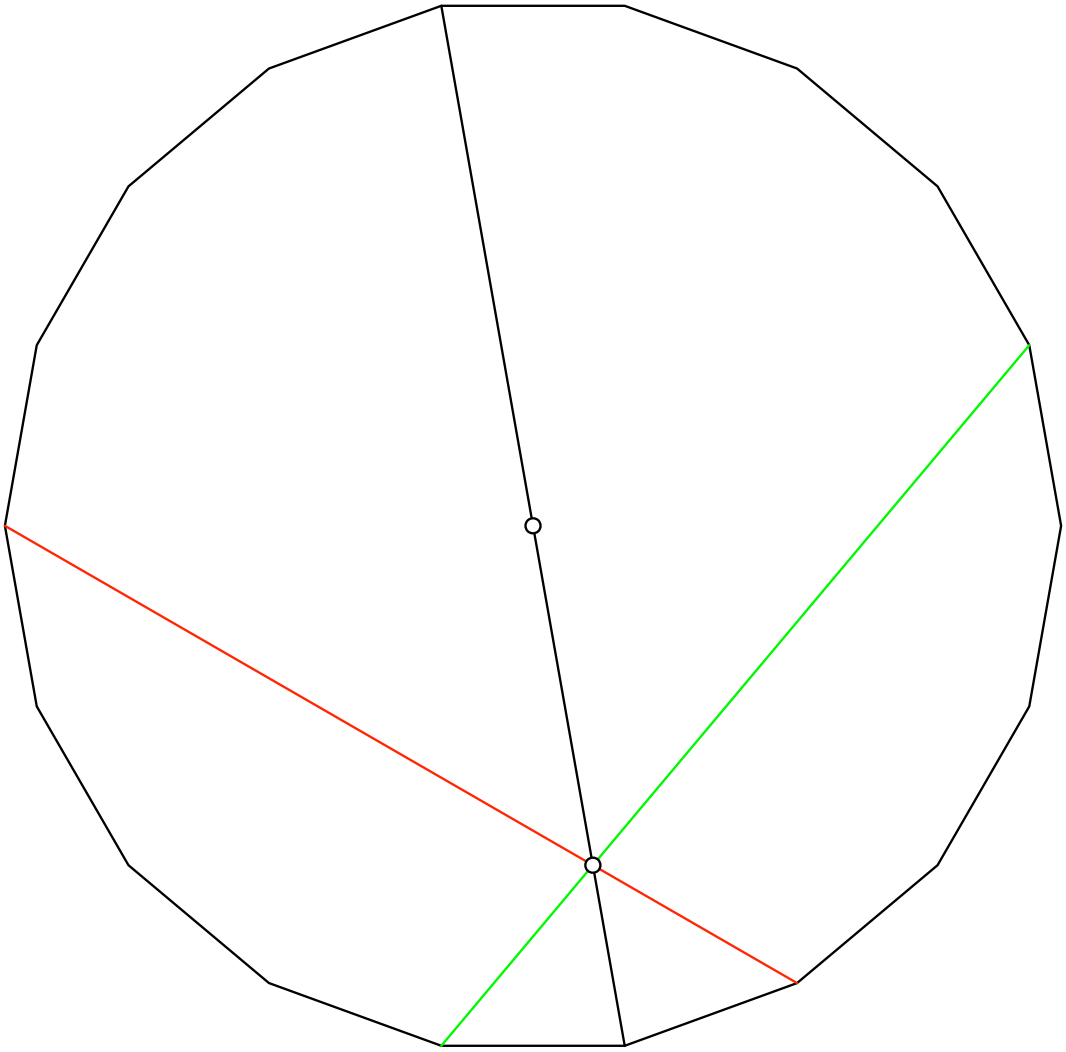

Abb. 3: Die drei Diagonalen schneiden sich in einem Punkt

Ebenso scheinen sich die drei Diagonalen in der Abbildung 4 in einem gemeinsamen Punkt zu schneiden. Dies ist aber nicht trivial und muss bewiesen werden.

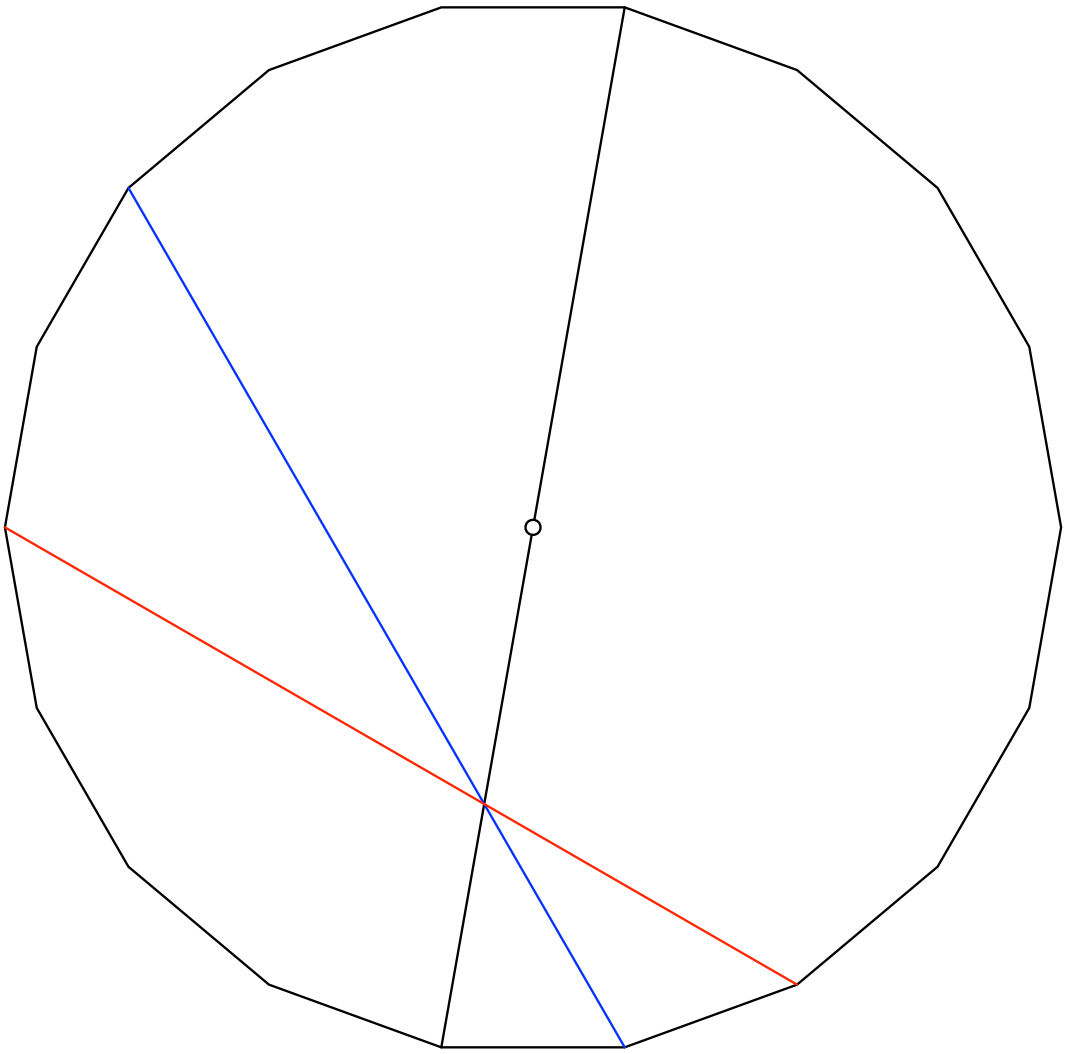

Abb. 4: Die drei Diagonalen schneiden sich in einem Punkt

Wir untersuchen zunächst den Schnittpunkt der schwarzen Diagonale mit der roten Diagonale (Abb. 5). Wir können ein rechtwinkliges Dreieck einpassen mit den in der Abbildung 5 angegebenen Daten. Für die rote Hypotenuse ergibt sich: sin(30°)/cos(20°) ≈ 0.5320888860

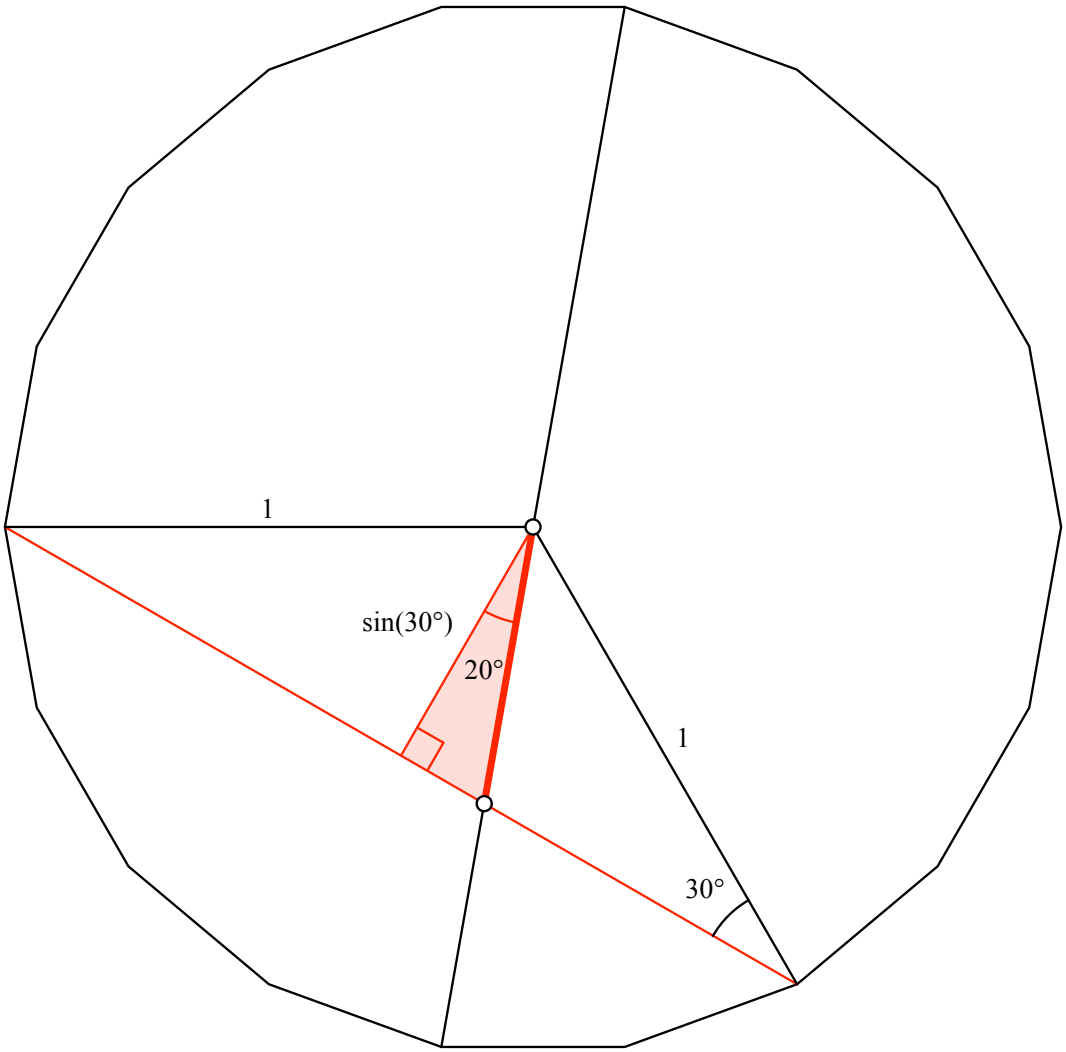

Abb. 5: Schwarze und rote Diagonale

Analog verfahren wir mit der schwarzen und der blauen Diagonale (Abb. 6). Für die blaue Hypotenuse ergibt sich: sin(20°)/cos(50°) ≈ 0.5320888864

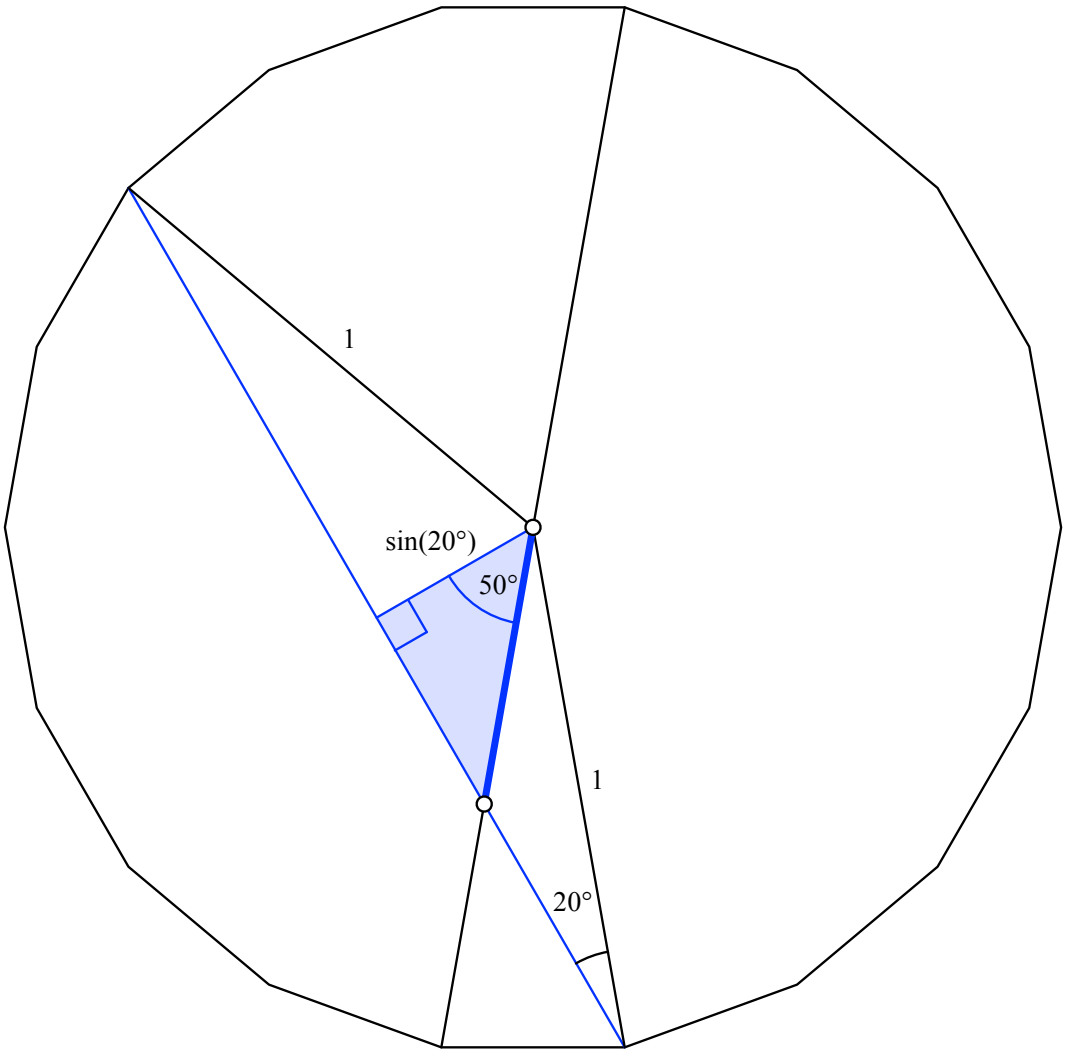

Abb. 6: Schwarze und blaue Diagonale

Die numerischen Werte (floating-point arithmetic) der beiden Hypotenusenlängen scheinen übereinzustimmen. Das ist allerdings noch kein Beweis für den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Diagonalen.

Wenn wir hingegen die Ausdrücke sin(30°)/cos(20°) und sin(20°)/cos(50°) mit CAS vergleichen (der Autor hat mit Maple gearbeitet), ist ihre Differenz exakt null (und ihr Quotient exakt eins). Dies ist ein Beweis für den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Diagonalen.

Durch Vergleich der beiden rechtwinkligen Dreiecke sehen wir, dass sich die Normalen der roten und der blauen Diagonale unter einem Winkel von 30° schneiden. Dies ist auch der Schnittwinkel dieser beiden Diagonalen.

3.3 Überlagerung

Die Abbildung 7 zeigt eine Überlagerung der relevanten Diagonalen der Abbildungen 3 bis 6.

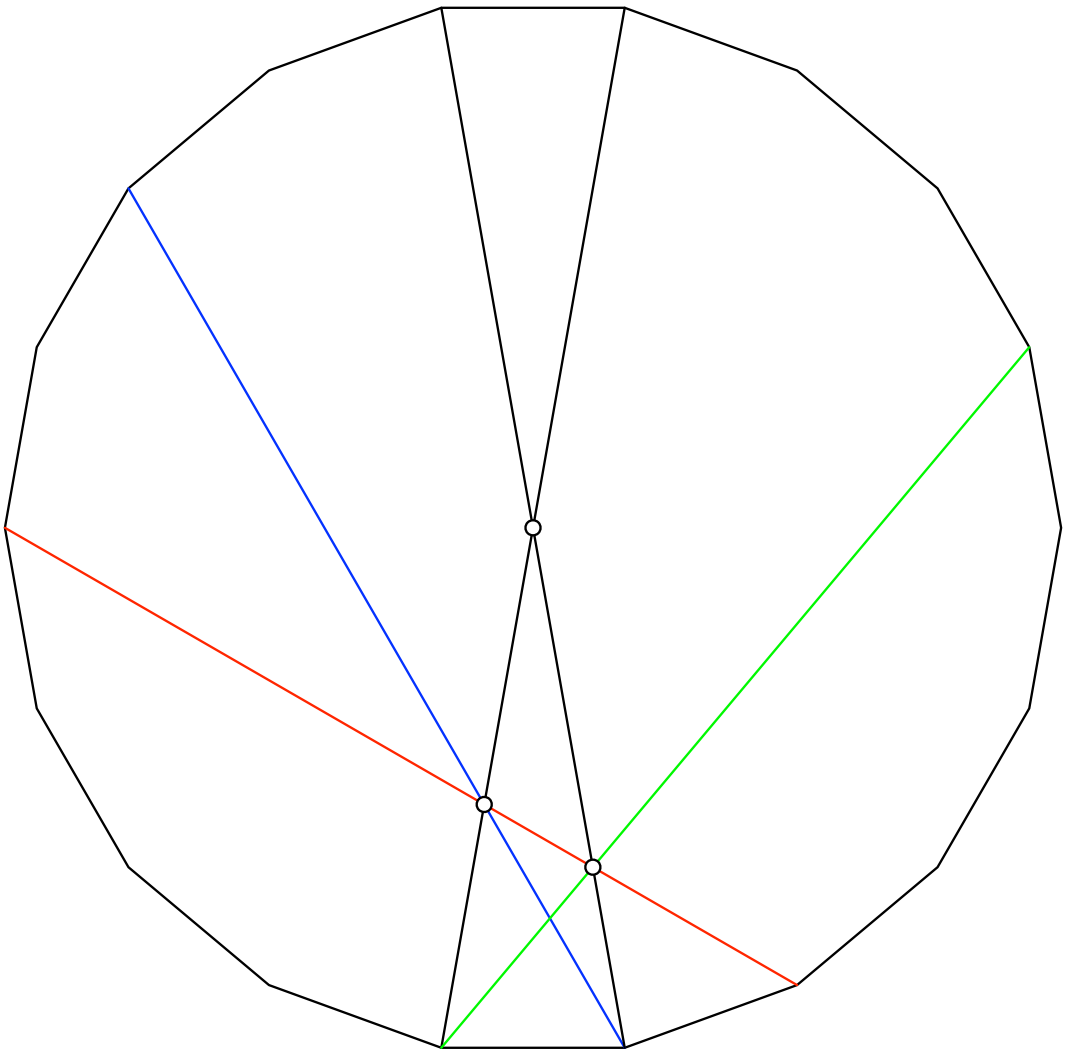

Abb. 7: Überlagerung

3.4 Lösungsfigur

Wir können nun die Figur der Aufgabenstellung einpassen (Abb. 8). Der gesuchte Winkel ist der Schnittwinkel der roten und blauen Diagonale, also 30°.

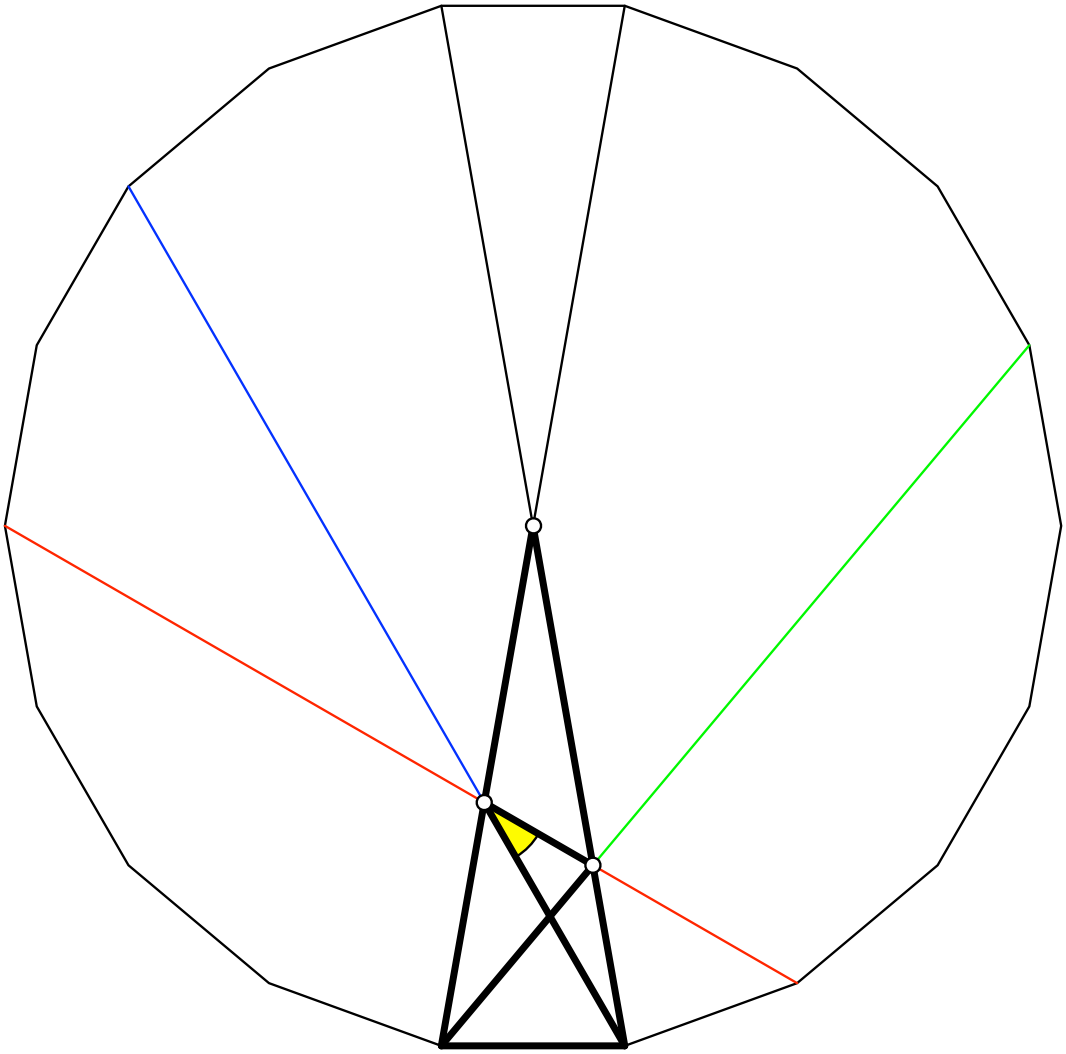

Abb. 8: Lösungsfigur

Weblinks

Hans Walser: 18-Eck

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/1/18-Eck/18-Eck.htm