Hans Walser, [20170420]
Anregungen: E. V., M. und Y. W., M.

18-Eck

1 Problemstellung

Es ist zu zeigen, dass in der Figur (Abb. 1) mit den gegebenen Winkeln die beiden fett eingezeichneten Strecken gleich lang sind.

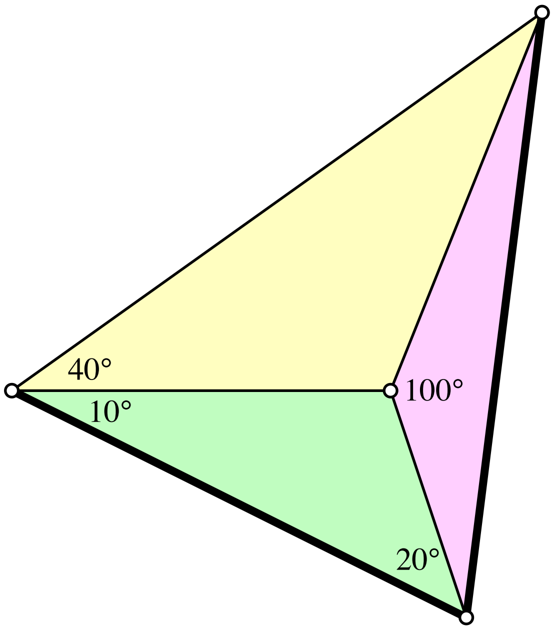

Abb. 1: Basisfigur

2 Forbidden fruit taste the sweetest

Die in der Problemstellung vorkommenden Winkel sind alle nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Wir können das Problem also nicht empirisch mit Zirkel und Lineal angehen.

Diese Winkel erscheinen aber alle im regelmäßigen 18-Eck mit seinen Diagonalen.

3 Ein „besonderer“ Punkt im regelmäßigen 18-Eck

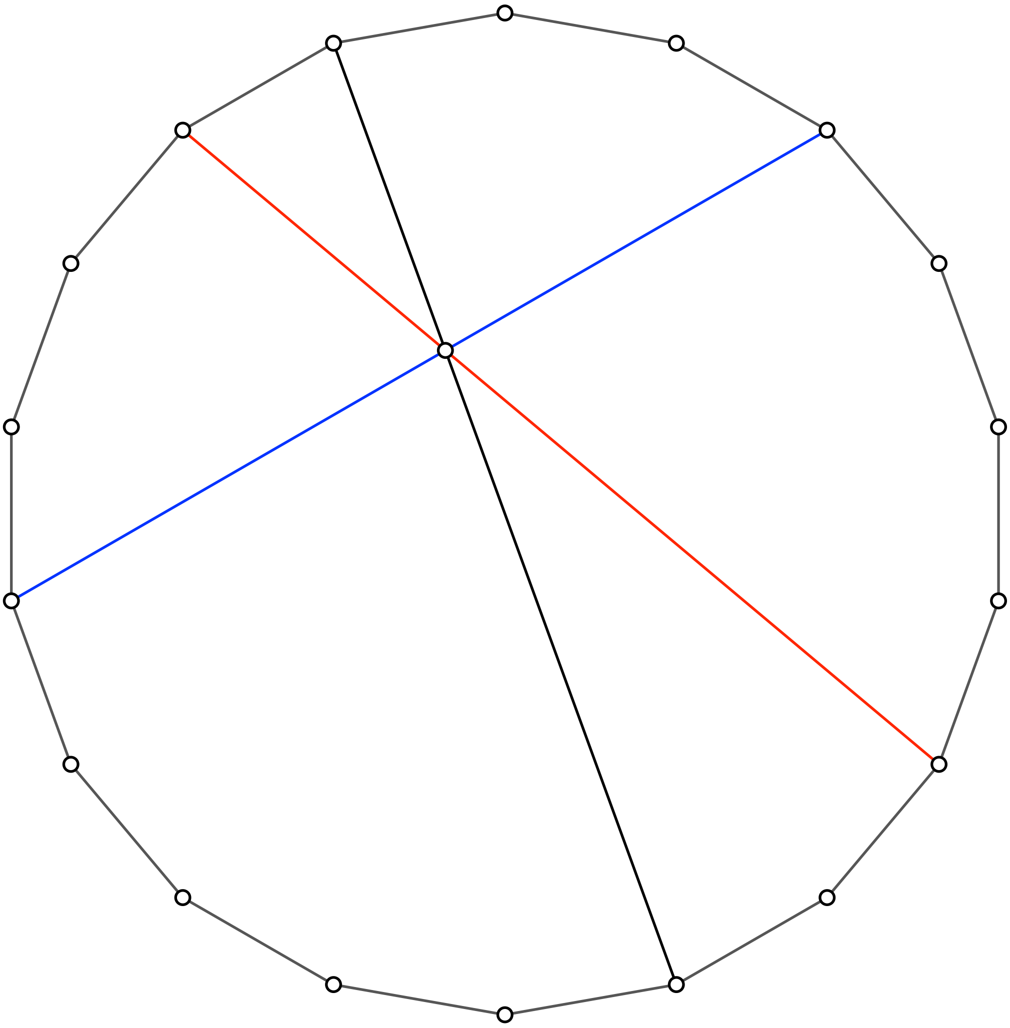

Abb. 2: Schnittpunkt dreier Diagonalen

Im regelmäßigen 18-Eck (Abb. 2) verlaufen die drei eingezeichneten Diagonalen durch einen gemeinsamen Punkt. Siehe auch (Walser 2012, S. 31).

Die schwarze Diagonale ist eine Mittelpunktdiagonale.

Für den Beweis der Schnittpunkteigenschaft lokalisieren wir den Schnittpunkt der schwarzen mit der roten Diagonalen (schwarz-roter Schnittpunkt) und den Schnittpunkt der schwarzen mit der blauen Diagonalen (schwarz-blauer Schnittpunkt) je relativ zum Mittelpunkt des 18-Eckes.

3.1 Schwarz-roter Schnittpunkt

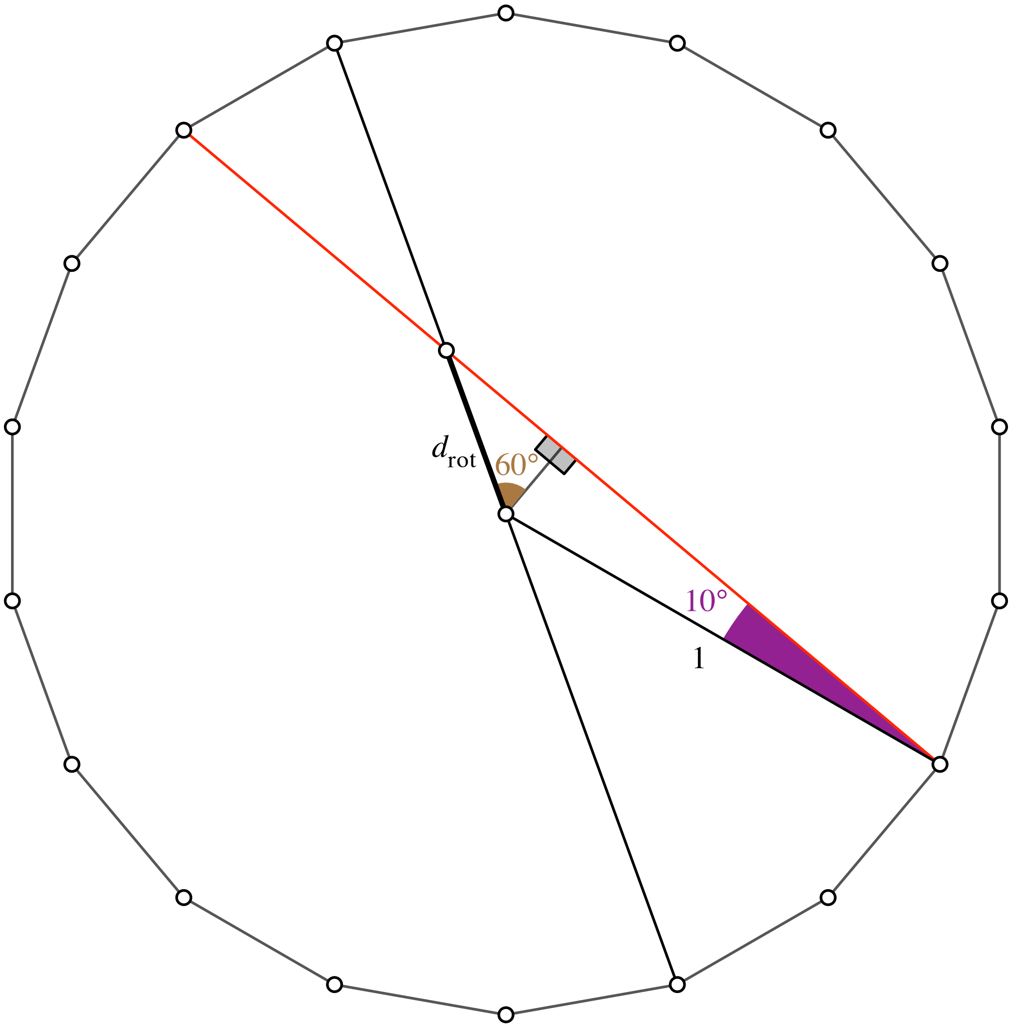

Abb. 3: Schwarz-roter Schnittpunkt

Den Umkreisradius des regelmäßigen 18-Ecks setzen wir 1. Die in der Abbildung 3 eingezeichneten Winkel lassen sich leicht mit Kreiswinkelsätzen herleiten.

Für den Abstand d_{rot} des schwarz-roten Schnittpunktes vom Mittelpunkt des regelmäßigen 18-Eckes erhalten wir:

$$d_{\text{rot}} = \frac{\sin(10^\circ)}{\cos(60^\circ)} \tag{1}$$

3.2 Schwarz-blauer Schnittpunkt

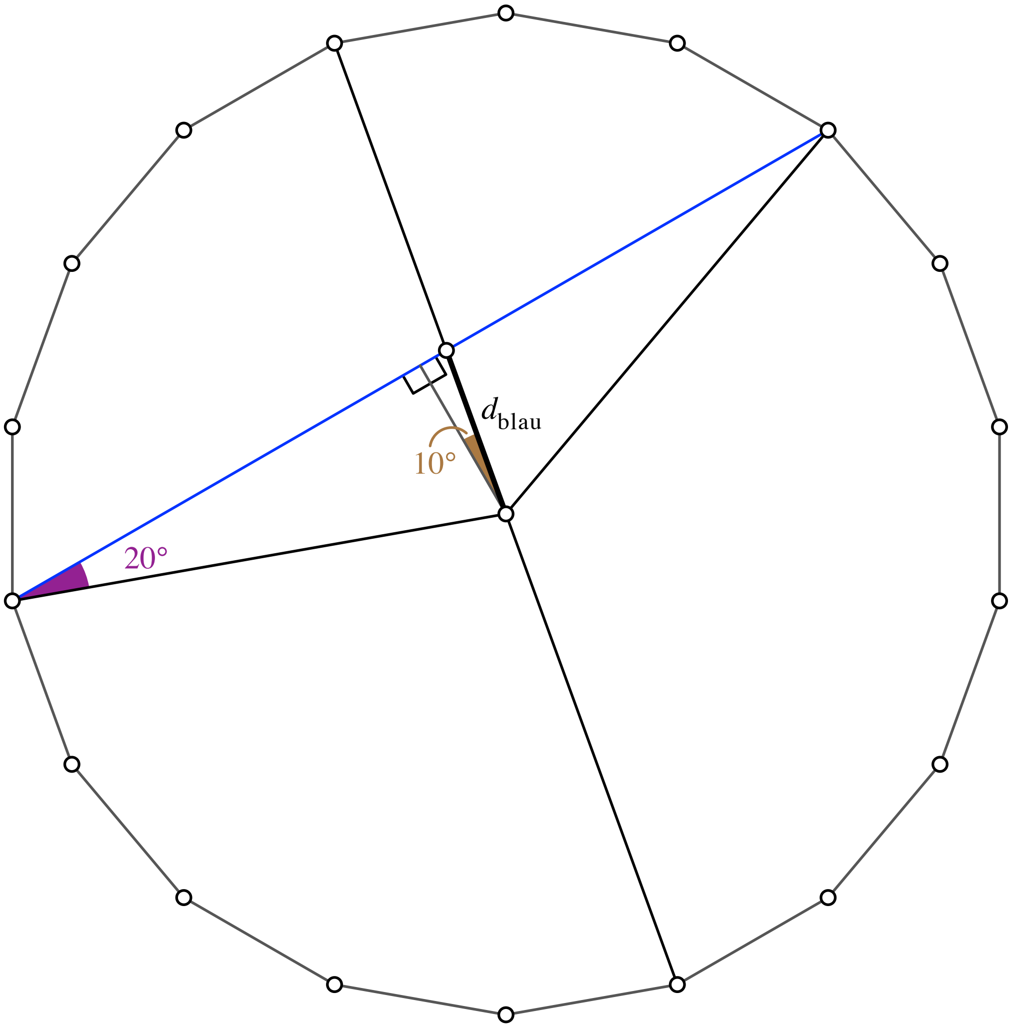

Abb. 4: Schwarz-blauer Schnittpunkt

Die in der Abbildung 4 eingezeichneten Winkel lassen sich leicht mit Kreiswinkelsätzen herleiten. Für den Abstand d_{blau} des schwarz-blauen Schnittpunktes vom Mittelpunkt des regelmäßigen 18-Eckes erhalten wir:

$$d_{\text{blau}} = \frac{\sin(20°)}{\cos(10°)} \tag{2}$$

Für die Schnittpunkteigenschaft der drei Diagonalen haben wir zu zeigen:

$$d_{\text{blau}} = d_{\text{rot}} \quad \text{also} \quad \frac{\sin(20°)}{\cos(10°)} = \frac{\sin(10°)}{\cos(60°)} \tag{3}$$

Für die linke Seite erhalten wir mit dem Additionstheorem des Sinus:

$$\frac{\sin(20°)}{\cos(10°)} = \frac{\sin(10°+10°)}{\cos(10°)} = \frac{2\sin(10°)\cos(10°)}{\cos(10°)} = 2\sin(10°) \tag{4}$$

Für die rechte Seite erhalten wir:

$$\frac{\sin(10°)}{\cos(60°)} = \frac{\sin(10°)}{\frac{1}{2}} = 2\sin(10°) \tag{5}$$

Damit ist die Schnittpunkteigenschaft der drei Diagonalen bewiesen.

4 Einbetten ins regelmäßige 18-Eck

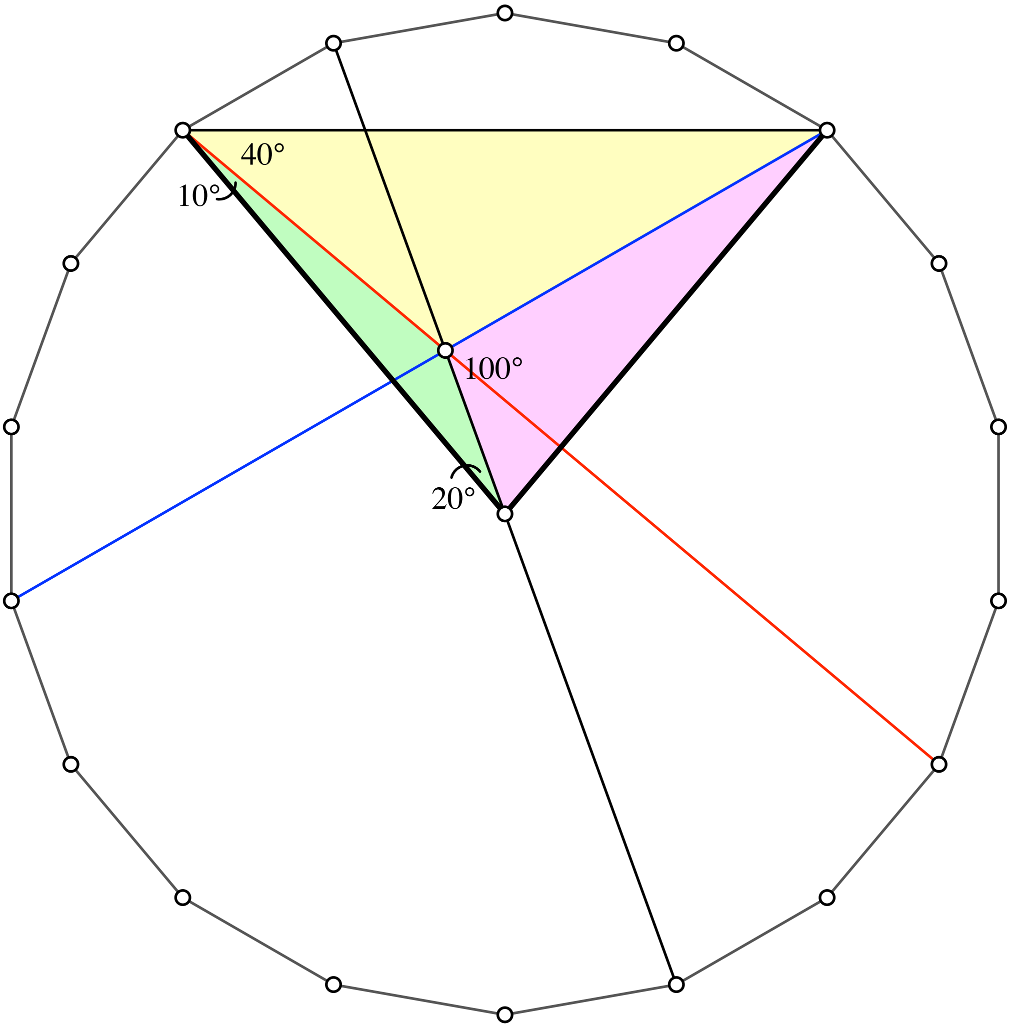

Abb. 5: Einbettung ins regelmäßige 18-Eck

Nun geht es ratzfatz.

Wir betten die Figur der Problemstellung (Abb. 1) ins regelmäßige 18-Eck ein (Abb. 5) und verifizieren die Winkel.

Die beiden schwarzen Strecken sind je der Umkreisradius, also gleich lang. Dies war zu zeigen.

5 Varianten

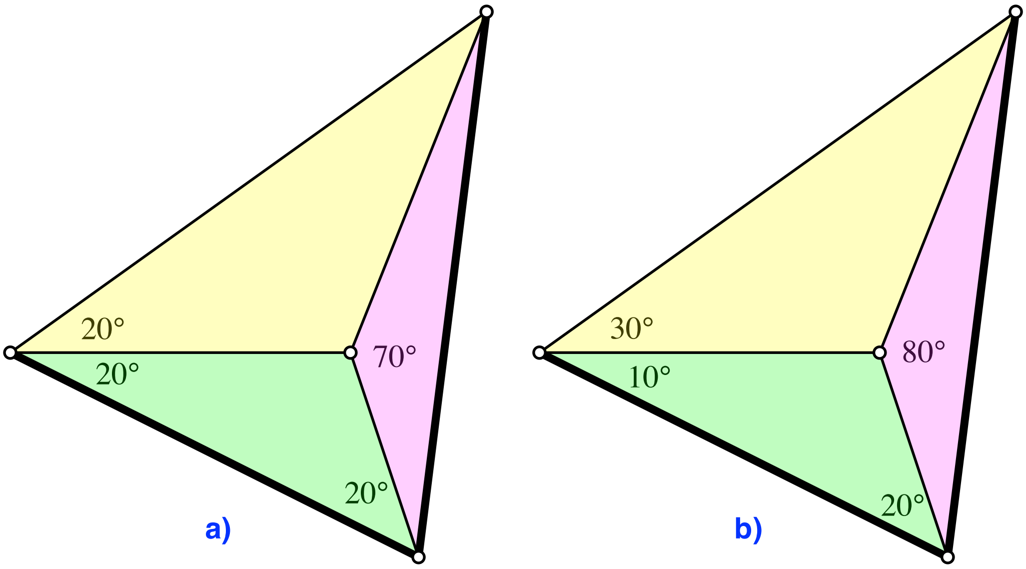

Abb. 6: Varianten

Die Abbildung 6 zeigt zwei Varianten der Problemstellung.

Literatur

Walser, Hans (2012): 99 Schnittpunkte. Beispiele – Bilder – Beweise. 2. Auflage. EAGLE, Edition am Gutenbergplatz: Leipzig. ISBN 978-3-937219-95-0.