Hans Walser, [20181008]

111111 durch 7

1 Einstiegsbeispiel

Es ist:

$$111111 : 7 = 15873 \tag{1}$$

2 Verallgemeinerung

Es sei p eine Primzahl, $p \geq 7$ und λ die Periodenlänge von $\frac{1}{p}$ im Dezimalsystem.

Dann ist die Dezimalzahl, die aus λ Einsen besteht, durch p teilbar.

3 Beispiele

$p = 7$. Es ist:

$$\tfrac{1}{7} = 0.\overline{142857} \quad \text{also} \quad \lambda = 6 \tag{2}$$

Daher ist die aus 6 Einsen bestehende Zahl 111111 durch 7 teilbar.

$p = 11$. Es ist:

$$\tfrac{1}{11} = 0.\overline{09} \quad , \quad \lambda = 2 \tag{3}$$

Also ist 11 durch 11 teilbar.

$p = 13$. Es ist:

$$\tfrac{1}{13} = 0.\overline{076923} \quad , \quad \lambda = 6 \tag{4}$$

Kontrolle:

$$111111 : 13 = 8547 \tag{5}$$

$p = 17$. Es ist:

$$\tfrac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647} \quad , \quad \lambda = 16 \tag{6}$$

Kontrolle:

$$1111111111111111 : 17 = 65359477124183 \tag{7}$$

4 Beweis

Bei der Umwandlung eines Dezimalbruches in einen Bruch mit Zähler und Nenner wird der Dezimalbruch mit 10^{λ} multipliziert und anschließend der Bruch subtrahiert. Damit fallen die unendlich vielen Stellen weg.
In unserem Fall heißt das:

$$10^{\lambda}\frac{1}{p}-\frac{1}{p}=n, \quad n\in\mathbb{N} \tag{8}$$

Dabei ist n die aus den λ Ziffern der Periode von p bestehende Dezimalzahl.
Es ist also:

$$10^{\lambda}-1=pn \tag{9}$$

Nun ist nach der erweiterten dritten binomischen Formel:

$$10^{\lambda}-1=\underbrace{(10-1)}_{=9}\underbrace{\left(10^{\lambda-1}+10^{\lambda-2}+\cdots+10^{0}\right)}_{\substack{\text{Dezimalzahl, bestehend}\\ \text{aus } \lambda \text{ Einsen}}}=np \tag{10}$$

Da 9 und p teilerfremd sind, teilt p die aus λ Einsen bestehende Zahl.
Umgekehrt ist 9 ein Teiler von n.

5 Folgerungen

Jede aus λ gleichen Ziffern bestehende Dezimalzahl ist durch p teilbar.
Beispiele:

$$\begin{array}{c} 222222 : 7 = 31746 \\ 333333 :7 = 47619 \\ \text{usw.} \\ 999999 : 7 =142857 \end{array} \tag{11}$$

Beim letzten Beispiel ergibt sich gemäß (9) die Zahl n.

Eine aus weniger als λ Neunen bestehende Dezimalzahl ist nicht durch p teilbar. Andernfalls könnte man mit dem entstehenden Quotienten einen periodischen Dezimalbruch für $\frac{1}{p}$ entwickeln der eine kleinere Periodenlänge als λ hat.

6 Weitere Teilbarkeiten

Gemäß (10) ist 9 ein Teiler von n.

Beispiel: für die zu $p = 7$ gehörende Zahl $n = 142857$ gilt:

$$\begin{aligned} 142857 : 9 &= 15873 \\ 142857 : 99 &= 1443 \\ 142857 : 999 &= 143 \end{aligned} \tag{12}$$

Hingegen ist:

$$\begin{aligned} 142857 : 9999 &= 14.\overline{2871} \\ 142857 : 99999 &= 1.\overline{42858} \end{aligned} \tag{13}$$

Hintergrund: die Periodenlänge $\lambda = 6$ von $p = 7$ lässt sich zerlegen in $\lambda = 2 \cdot 3$. Das hat zur Folge, dass n auch teilbar ist durch Zusammensetzungen von 2 oder 3 Neunen.

Beweis: Sei $\lambda = \mu \cdot \nu$. Damit ist:

$$10^{\lambda} - 1 = \left(10^{\mu}\right)^{\nu} - 1 = \underbrace{\left(10^{\mu} - 1\right)}_{\substack{\text{Besteht aus} \\ \mu \text{ Neunen}}} \left(\left(10^{\mu}\right)^{\nu-1} + \left(10^{\mu}\right)^{\nu-2} + \cdots + \left(10^{\mu}\right)^{0} \right) = np \tag{14}$$

Der aus μ Neunen bestehende Faktor ist wegen $\mu < \lambda$ nicht durch p teilbar. Daher ist er ein Teiler von n.